LINEARE KOMPLEMENTÄRPROBLEME IM OPERATIONS RESEARCH UND IN DER WIRTSCHAFTSTHEORIE

Dissertation
zur Erlangung des wirtschaftswissenschaftlichen Doktorgrades
der Wirtschafts-und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt
von
MICHAEL BASTIAN
aus Hamburg

Göttingen 1975

LINEARE KOMPLEMENTÄRPROBLEME IM OPERATIONS RESEARCH UND IN DER WIRTSCHAFTSTHEORIE

Dissertation
zur Erlangung des wirtschaftswissenschaftlichen Doktorgrades
der Wirtschafts-und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt
von
MICHAEL BASTIAN
aus Hamburg

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Berichterstatter: Professor Dr. Hartmut Noltemeier

Mitberichterstatter: Professor Dr. Jürgen Bloech

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Dezember 1975

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung 1

2. Komplementärpivot-Algorithmen zur Lösung des linearen Komplementärproblems LK(M,q) 7

2.1 Zur Notation 7

2.2 Fastkomplementäre Iterationspfade: eine geometrische Betrachtung 9

2.3 Komplementärpivot-Algorithmen 22

2.4 Der Algorithmus von Lemke 25

3. Mathematische Ergebnisse der Komplementärtheorie ... 32

3.1 Zur Existenz von Lösungen des Problems LK(M,q) für spezielle Klassen von Matrizen (M,q) 32

3.2 Zur Bestimmbarkeit von Lösungen des Problems LK(M,q) für spezielle Klassen von Matrizen (M,q) 35

4. Ökonomische Probleme als lineare Komplementärprobleme: Formulierung und Lösung 44

4.1 Lineare und quadratische Programme 44

4.2 Pseudokonvexe Programme 48

4.2.1 Pseudokonvexe Programme mit quadratischer Zielfunktion 50

4.2.2 Programme mit gebrochener Zielfunktion: ein Beispiel aus der Portfolio Selection Theorie 52

4.3 Gleichgewichtspunkte nichtkooperativer Spiele .. 62

4.3.1 Bimatrixspiele 62

4.3.2 Polymatrixspiele 67

4.3.3 Endliche 2-Personenspiele mit unvollständiger Information 70

4.4 Ein Modell der Aufteilung bedingter Nachfrage auf einem oligopolistischen Markt 73

4.5 Ein Gleichgewichtsmodell für eine Volkswirtschaft mit garantierten Mindestpreisen 78

4.5.1 Das Grundmodell 78

4.5.2 Das Modell mit garantierten Mindestpreisen und linearen Preis-Absatz-Funktionen 82

4.5.3 Ein Zahlenbeispiel 93

4.5.4 Zur Problematik der Einführung oberer Preisschranken 97

4.6 Die Bestimmung eines im Nutzenmaximum invarianten Investitionsgüterbestands im Modell einer Volkswirtschaft mit linearer Technologie 109

4.6.1 Das Modell von Hansen und Koopmans 109

4.6.2 Zur Beziehung zwischen der linearen Optimierung mit unendlichem Horizont und einem linearen Komplementärproblem 112

4.6.3 Die Problemstellung als lineares Programm mit unendlichem Horizont 116

4.7 Weitere Gleichgewichtsmodelle 122

4.7.1 Eine Verallgemeinerung des Modells von Mathiesen 122

4.7.2 Die Bestimmung eines Tauschgleichgewichts bei linearen Nutzenfunktionen 128

5. Das Problem der Ermittlung mehrerer Lösungen 133

5.1 Die Bestimmung von Kuhn-Tucker-Punkten quadratischer Programme 133

5.2 Die Methode der Rhombenpfade zur Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in Bimatrixspielen 138

6. Weitere Verfahren und verwandte Methoden 154

6.1 Weitere Verfahren zur Lösung linearer Komplementärprobleme 154

6.2 Lemkes kombinatorischer Ansatz außerhalb der Klasse der Komplementärpivot-Algorithmen 157

6.2.1 Verfahren zur Bestimmung ökonomischer Gleichgewichte: eine Übersicht 159

6.2.2 Die Sandwich-Methode 162

6.2.3 Entwicklungstendenzen der Komplementärtheorie: Vereinheitlichung durch Abstraktion 177

7. Literaturverzeichnis 179

1. Einführung

Innerhalb der Mathematischen Optimierung und der Wirtschaftstheorie hat in den vergangenen Jahren das folgende "Lineare Komplementärproblem" besondere Beachtung gefunden:

LK(M,q) : man bestimme einen Vektor $\binom{w}{z} \in R^{2k}$ mit der Eigenschaft:

$$w = M \cdot z + q \qquad (1)$$

$$w, z \geq 0 \qquad \text{("Nichtnegativität")} \qquad (2)$$

$$w^T \cdot z = 0 , \qquad \text{("Komplementarität")} \qquad (3)$$

wobei M eine reelle k×k-Matrix ist, q ein k-Vektor und ^{T} die Matrixtransposition kennzeichnet.

Diese Problemstellung ist sehr allgemein; so lassen sich etwa lineare und quadratische Optimierungsaufgaben sowie unterschiedlichste Fixpunktprobleme in der ökonomischen Gleichgewichtstheorie und der Spieltheorie als lineare Komplementärprobleme formulieren; weitere Anwendungen finden sich unter anderem in der Portfolio-Selection Theorie und in der Oligopoltheorie. (Eine ausführliche Darstellung

wichtiger Anwendungen erfolgt im Kapitel 4).
Auch in der Physik und in der Technik sind Probleme dieser Gestalt betrachtet worden (vgl. z.B. Cryer [14], De Donato und Maier [19], Kaneko [51],[52], Maier [63] und Abschnitt 6.1).

Grundsätzlich lassen sich Lösungen des Problems LK(M,q) offenbar dadurch bestimmen, daß man - etwa mit dem Algorithmus von Balinski [3] - die zulässigen Basislösungen des Systems (1) enumeriert und prüft, ob auch die Bedingung (3) erfüllt ist. Schon für Probleme relativ bescheidener Größe verbietet sich allerdings dieses Vorgehen wegen des großen Rechenaufwands. Ähnliches gilt für ein von Murty [73] vorgeschlagenes Verfahren, welches jedoch insofern von Interesse ist, als es die Lösung von LK(M,q) auf ein Überdeckungsproblem† zurückführt; derartige Beziehungen sind auch von Garcia [35] untersucht worden.
Ein "effizientes" Verfahren, welches für beliebige Daten (M,q) eine Lösung von LK(M,q) bestimmt, gibt es nicht und ist wegen des hohen Schwierigkeitsgrades des Problems auch nicht zu erwarten: "if arbitrary LCP's § could be efficiently solved, so could non-convex quadratic programs

---

† Einen Überblick über die Theorie der Überdeckungsprobleme sowie eine umfangreiche Literaturauswahl geben Garfinkel und Nemhauser [37].

§ LCP steht hier für linear complementarity problem.

and hence integer programs" (M.J. Todd [95], S. 1).†

Es sind jedoch Algorithmen entwickelt worden, die das Problem LK(M,q) unter bestimmten Voraussetzungen an die Matrix (M,q) "effizient" lösen. Am universellsten geeignet erscheinen bis heute die "Komplementärpivot-Algorithmen", die auf ein von Lemke und Howson [60] im Jahre 1964 vorgeschlagenes Verfahren zur Bestimmung eines Gleichgewichtspunktes in Bimatrixspielen zurückgehen.
Die vorliegende Arbeit beschränkt sich bei der Erörterung von Lösungsverfahren für das Problem LK(M,q) im wesentlichen auf solche Komplementärpivot-Algorithmen. Weitere Lösungsverfahren werden im Abschnitt 6.1 kurz erwähnt.

---

† Die Formulierung eines quadratischen Programms als lineares Komplementärproblem wird im Abschnitt 4.1 gegeben. Todd spielt hier vermutlich darauf an, daß sich das 0-1-Programm:

$$\begin{aligned} &(GP) \quad \text{minimiere} \quad f(x) = c^T \cdot x \\ &\qquad \text{über} \qquad W = \{ x \in R^n \mid A \cdot x \leq b, \quad x_i \in \{0,1\} \; \forall \; i \} \end{aligned}$$

in folgender Weise als quadratisches Programm schreiben läßt:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} \quad g(x) = c^T \cdot x + G \cdot (e-x)^T \cdot x \\ &\text{über} \qquad \{ x \in R^n \mid A \cdot x \leq b, \quad 0 \leq x \leq e \} , \end{aligned}$$

wobei e den n-Vektor bezeichnet, dessen Komponenten ausnahmslos gleich 1 sind, und G eine sehr große Zahl ist. Darüber hinaus gibt es eine direkte Beziehung zwischen dem ganzzahligen linearen Programm (GP) und dem linearen Komplementärproblem LK(M,q) mit

$$M = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} e \\ b \end{pmatrix} : \quad \text{ist } \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \text{ eine}$$

Lösung von LK(M,q), dann ist durch die ersten n Komponenten des Vektors $\hat{z}$ ein Punkt der Menge W gegeben.

Nach einigen Definitionen und Annahmen wird im zweiten Kapitel zunächst das Verfahren von Lemke und Howson vorgestellt; der zugrunde liegende kombinatorische Ansatz wird erläutert und an einem Beispiel verdeutlicht. Eine in vielen praktischen Fällen anwendbare Version, der Algorithmus von Lemke, ist Gegenstand des Abschnitts 2.4 .

Im dritten Kapitel werden verschiedene Klassen von Matrizen (M,q) im Zusammenhang mit der Lösbarkeit des Problems LK(M,q) betrachtet: der Abschnitt 3.1 nennt Ergebnisse, die die Existenz von Lösungen betreffen; der Abschnitt 3.2 gibt einen Überblick über wichtige Klassen von Matrizen (M,q), für die Lemkes Algorithmus das Problem LK(M,q) "verarbeitet", d.h. entweder eine Lösung bestimmt, oder aber feststellt, daß keine Lösung existiert.

Das Kernstück der Arbeit bildet das vierte Kapitel, in dem die Bedeutung der Komplementärpivot-Algorithmen für die Lösung wirtschaftswissenschaftlicher Problemstellungen dargelegt wird. Zahlreiche ökonomische Fragestellungen werden als lineare Komplementärprobleme formuliert und gelöst. Zum Teil ist dabei die Entwicklung spezieller Lösungsalgorithmen erforderlich (vgl. z.B. Abschnitt 4.5); zum Teil handelt es sich auch um Probleme, bei deren Lösung auf die Ergebnisse des dritten Kapitels zurückgegriffen werden kann. Um die Vielseitigkeit der neuen Methoden herauszustellen, wurden auch solche Probleme aufgenommen,

zu deren Lösung bereits andere Verfahren existieren; bei Verwendung eines geeigneten Komplementärpivot-Algorithmus' ist es zuweilen möglich, die üblichen Voraussetzungen an die Daten eines Modells abzuschwächen (vgl. Abschnitt 4.4).

Die Abschnitte 4.1 und 4.2 befassen sich mit quadratischen und pseudokonvexen Programmen; im Unterabschnitt 4.2.2 wird eine spezielle Fragestellung der Portfolio-Selection Theorie herausgegriffen, die auf das Problem der Minimierung der (doch recht unhandlich erscheinenden) Funktion

$$f(x) = \frac{-b^T \cdot x}{\sqrt{x^T \cdot C \cdot x}}$$

über linearen Nebenbedingungen führt; Lemkes Algorithmus erweist sich als geeignet zur Lösung dieses Problems.

Im Abschnitt 4.4 wird gezeigt, wie sich ein Problem der Oligopoltheorie als lineares Komplementärproblem unter erheblich allgemeineren Voraussetzungen lösen läßt als mit dem von Levitan [61] speziell für diese Fragestellung entwickelten Algorithmus.

Im Abschnitt 4.5 wird für das Modell einer Volkswirtschaft mit garantierten Mindestpreisen die Existenz einer ungeraden Anzahl von Gleichgewichtslösungen bewiesen und ein Lösungsverfahren entwickelt. Die besondere Problematik staatlich verordneter Preislimits (oberer Preisschranken) wird dabei im Modell sichtbar.

Der Abschnitt 4.7.1 verallgemeinert ein Gleichgewichtsmodell von Mathiesen [69].

Weitere bekannte Anwendungen der Komplementärtheorie auf

spieltheoretische und ökonomische Probleme werden in den Abschnitten 4.3, 4.6 und 4.7.2 kurz erläutert.

Im fünften Kapitel werden Probleme betrachtet, für die die Bestimmung aller Lösungen des zugehörigen linearen Komplementärproblems von Interesse ist.
Es werden Lösungsansätze der Literatur erläutert; darüber hinaus wird für das Problem der Bestimmung der Gleichgewichtspunkte eines Bimatrixspiels ein Komplementärpivot-Algorithmus vorgestellt, der mehr Gleichgewichtspunkte bestimmt als die bekannten Verfahren.

Im sechsten Kapitel werden zunächst einige Verfahren zur Lösung des Problems LK(M,q) aufgeführt, die nicht in die Klasse der Komplementärpivot-Algorithmen fallen.
Ziel des Abschnitts 6.2 ist es, die allgemeinere Bedeutung des Ansatzes von Lemke und Howson herauszustellen. Es wird ein Überblick über eine Klasse neuartiger Algorithmen zur Berechnung ökonomischer Gleichgewichte nichtlinearer Modelle (sowie zur Lösung ähnlicher Fixpunktprobleme) gegeben, deren Endlichkeit in analoger Weise zu der der Komplementärpivot-Algorithmen nachgewiesen werden kann. Diese Parallelen werden im Unterabschnitt 6.2.2 beispielhaft anhand eines der Verfahren, der "Sandwich-Methode", herausgearbeitet.

2. Komplementärpivot-Algorithmen zur Lösung des linearen Komplementärproblems LK(M,q)

In diesem Kapitel sollen einige einführende Erläuterungen zu Komplementärpivot-Algorithmen gegeben werden. Im Mittelpunkt steht dabei die Entwicklung der von Lemke und Howson [60] eingeführten charakteristischen Argumentationsweise, mit Hilfe derer man sich davon vergewissert, daß die Komplementärpivot-Algorithmen nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen. Es handelt sich im wesentlichen um eine Darstellung grundlegender Ergebnisse von Lemke-Howson [60] und Lemke [58] .

2.1 Zur Notation

R^n bezeichnet den n-dimensionalen euklidischen Raum und $R^{n\times m}$ den Raum aller reellen n×m-Matrizen. Die Elemente von R^n sind Spaltenvektoren ($R^n = R^{n\times 1}$); die Transposition eines Vektors wird durch den hochgestellten Index T gekennzeichnet.

$x^T \cdot y$ steht für das Skalarprodukt der Vektoren x und y.

Die mengentheoretischen Operatoren $\in, \subset, \cup, \cap, \times$ werden wie üblich† verwandt. Die Differenz zweier Mengen D und E ist wie folgt definiert:
$D \setminus E := \{x \in D \mid x \notin E\}$.

Ist $A \in R^{m \times n}$ eine reelle m×n-Matrix, $x \in R^m$ ein m-Vektor und sind ferner α und β Indexmengen mit $\alpha \subset \{1,2,..,m\}$ und $\beta \subset \{1,2,..,n\}$, so bezeichnet

A^T die Transponierte von A,

A_{ij} das j-te Element der i-ten Zeile von A,

$A_{\cdot j}$ die j-te Spalte von A,

$A_{i\cdot}$ die i-te Zeile von A,

$A_{\alpha\beta}$ die Untermatrix von A, die durch Streichen genau der Zeilen i und Spalten j aus A hervorgeht, für die gilt: $i \notin \alpha$ und $j \notin \beta$,

x_i die i-te Komponente von x,

x_α den Teilvektor von x, der durch Streichen genau der Komponenten x_i aus x entsteht, für die gilt: $i \notin \alpha$.

Sind x und y Vektoren des R^n, so ist die Schreibweise $x \geq y$ gleichbedeutend mit $x_i \geq y_i$ (i=1,2,..,n).

---

† Siehe z.B. Mangasarian [64] , S. 3f .

Schließlich bezeichnet

e_j den Vektor des R^j, dessen Komponenten ausnahmslos gleich 1 sind; (der Index j wird auch weggelassen, wenn die Dimension zweifelsfrei ist);

I_j die j-dimensionale Einheitsmatrix; (auch hier wird entsprechend der Index j häufig weggelassen).

2.2 Fastkomplementäre Iterationspfade: eine geometrische Betrachtung

Wir betrachten das lineare Komplementärproblem

LK(M,q) : man bestimme einen Vektor $\binom{w}{z} \in R^{2k}$ mit der Eigenschaft:

$$w = M \cdot z + q \qquad (1)$$

$$w, z \geq 0 \qquad (2)$$

$$w^T \cdot z = 0, \qquad (3)$$

wobei die quadratische Matrix $M \in R^{k \times k}$ und der Vektor $q \in R^k$ fest vorgegeben sind.

Durch die Bedingungen (1) und (2) wird das folgende Polyeder der "zulässigen Lösungen" definiert:

$$P = \{\binom{w}{z} \geq 0 \mid w = M \cdot z + q\} \quad .$$

Gesucht sind offenbar Punkte dieses Polyeders, die zusätzlich die Komplementärbedingung (3) erfüllen. Die in dieser Arbeit erörterten Komplementärpivot-Algorithmen zur Lösung des Problems LK(M,q) haben mit der wohlbekannten Simplexmethode zur Lösung linearer Programme gemein, daß sie systematisch eine Folge benachbarter Extrempunkte des Polyeders der zulässigen Lösungen erzeugen. Der wesentliche Unterschied zwischen den Verfahren liegt im Beweis der Endlichkeit: die Endlichkeit des Simplex-Algorithmus' beruht auf der monotonen Veränderung eines "Zielfunktionswertes" (vgl. Dantzig [15], S. 100), wogegen sich die Endlichkeitsbeweise für die auf Lemke und Howson [60] zurückgehenden Komplementärpivot-Algorithmen ausschließlich auf kombinatorische Argumente stützen.

Zunächst einige Definitionen und Vereinbarungen.
Wir bezeichnen die Lösungen von LK(M,q) auch deutlicher als komplementäre Lösungen. Die Variablen w_i, z_i $(1 \le i \le k)$, heißen zueinander komplementäre Variable. Erfüllt ein Vektor $\binom{w}{z}$ neben (1) und (2) noch die Bedingung

$$w^T \cdot z = w_j \cdot z_j > 0, \qquad (4)$$

so nennen wir $\binom{w}{z}$ eine fastkomplementäre Lösung der Klasse j. Eine solche Lösung besitzt also genau ein Variablenpaar w_j, z_j mit der Eigenschaft $w_j \cdot z_j > 0$;

alle übrigen Variablenpaare erfüllen bereits die Bedingung $w_i \cdot z_i = 0$.

Unter einer zulässigen Lösung des Systems (1) verstehen wir eine solche, die auch (2) erfüllt. Hat (1) eine zulässige Lösung, so sagt man auch, das Problem LK(M,q) sei zulässig.

Eine Basislösung von (1) erhält man, indem man k Komponenten des Vektors $\binom{w}{z}$ gleich Null setzt und (1) für die übrigen k Variablen (Basisvariablen) löst - vorausgesetzt, die entsprechenden Spalten von (I,-M) sind linear unabhängig. Hat eine Basislösung genau k positive Komponenten, so heißt sie nichtentartet.

Das Problem LK(M,q) ist nichtentartet, wenn jede komplementäre Lösung nichtentartet ist.

Für alle weiteren Erörterungen treffen wir folgende

(2.2.1) Annahme: Jede komplementäre und jede fastkomplementäre zulässige Basislösung des Systems $w = M \cdot z + q$ ist nichtentartet.

Diese Nichtentartungsannahme ist für die Endlichkeitsbeweise der Komplementärpivot-Algorithmen von entscheidender Bedeutung. Ist sie nicht erfüllt, so läßt sich die Endlichkeit der Algorithmen durch die von der linearen Optimierung her bekannten Standardtechniken (Perturbation des Polyeders P bzw. lexikographische Auswahl-

regeln) auch weiterhin gewährleisten. Eine Erörterung dieses Problemkreises findet sich bei Lemke - Howson [60] und eine ausführliche Darstellung bei Eaves [23] .

Für das Verständnis der Komplementärpivot-Algorithmen sind geometrische Betrachtungen am Polyeder P von Vorteil. Allgemein verstehen wir unter einer Facette eines Polyeders den Durchschnitt dieses Polyeders mit mindestens einer seiner begrenzenden Hyperebenen†.
Das Polyeder P ist durch die Lösungen des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} w &= M\cdot z + q \geq 0 \\ I\cdot z &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

definiert und hat daher die begrenzenden Hyperebenen:

$$H(w_i) = \left\{ \binom{w}{z} \in R^{2k} \mid w_i = 0 \right\} \quad i=1,..,k,$$

$$H(z_i) = \left\{ \binom{w}{z} \in R^{2k} \mid z_i = 0 \right\} \quad i=1,..,k.$$

Eine Facette F von P hat also die Gestalt

$$F = P \cap \bigcap_{i\in\alpha} H(w_i) \cap \bigcap_{i\in\beta} H(z_i)$$

mit $\alpha,\beta \subseteq \{1,2,..,k\}$ und $\alpha \cup \beta \neq \emptyset$.

---

† Im Gegensatz zur stützenden Hyperebene hat die begrenzende Hyperebene nicht unbedingt einen Punkt mit dem Polyeder gemeinsam (vgl. Stoer und Witzgall [91], S.37f).

Die Dimension von F ist offenbar die Dimension des Durchschnitts der Lösungsmenge von (a) mit der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$w_\alpha = 0 \ , \quad z_\beta = 0 \ .$$

Die Elemente der 0-dimensionalen Facetten von P nennt man Extrempunkte, die 1-dimensionalen Facetten heißen Kanten.

Der Sachverhalt sei an einem Zahlenbeispiel verdeutlicht:

man setze $M := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $q := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Das Polyeder $P = \{ \binom{w}{z} \geq 0 \mid w = M \cdot z + q \}$ besitzt neun Facetten, nämlich die vier Kanten

$$K_1 = P \cap H(z_1) = \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; z_1 = 0 , \ w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$K_2 = P \cap H(z_2) = \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; z_2 = 0 , \ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot z_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$K_3 = P \cap H(w_1) = \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; w_1 = 0 , \ z = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot w_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \dagger ,$$

$$K_4 = P \cap H(w_2) = \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; w_2 = 0 , \ z = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot w_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \dagger ,$$

die vier 0-dimensionalen Facetten

$$F_1 = \{E_1\} = P \cap H(z_1) \cap H(w_1) = \{ (0, \tfrac{3}{7}, 0, \tfrac{5}{2})^T \} \ ,$$

$$F_2 = \{E_2\} = P \cap H(z_1) \cap H(w_2) = \{ (3, 0, 0, 1)^T \} \ ,$$

$$F_3 = \{E_3\} = P \cap H(z_2) \cap H(w_1) = \{ (0, 9, 5, 0)^T \} \ ,$$

$$F_4 = \{E_4\} = P \cap H(z_2) \cap H(w_2) = \{ (\tfrac{9}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0)^T \}$$

und die Facette $F_0 = \emptyset$.

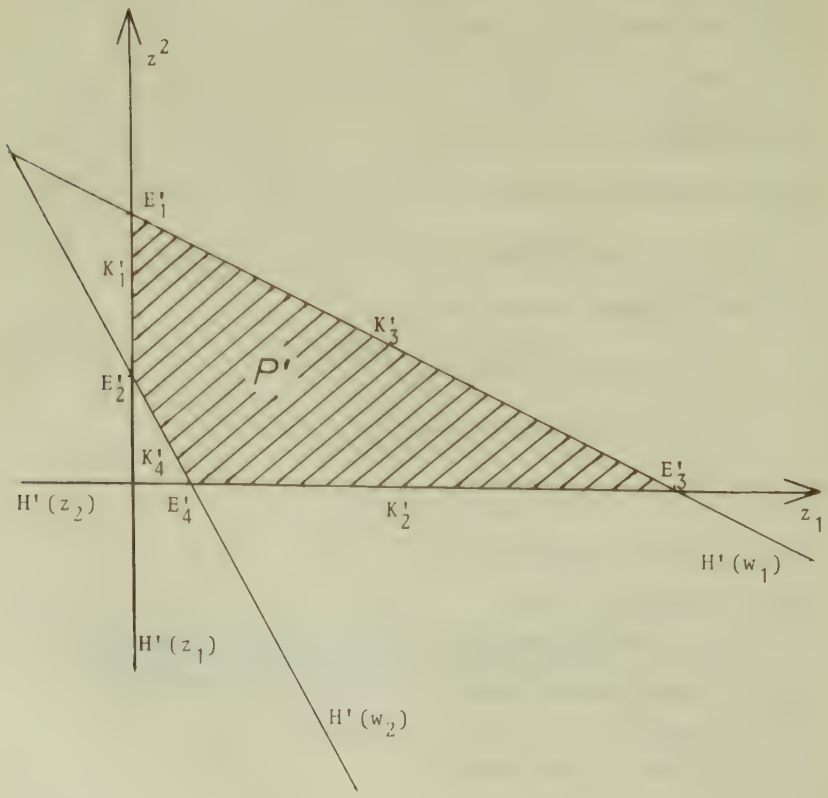
---

† Hier wurde für $w = M \cdot z + q$ die Darstellung $z = M^{-1} \cdot w - M^{-1} \cdot q$ gewählt.

Um eine graphische Darstellung zu ermöglichen, betrachten wir die Projektion des Polyeders P in den Raum der Variablen z_i $(i=1,2)$:

$$P' := \{ z \in R^2 \mid z \geq 0, \quad M \cdot z + q \geq 0 \}.$$

Offenbar läßt sich jeder Punkt $\hat{z} \in P'$ wieder eineindeutig dem Punkt $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \cdot \hat{z} + q \\ \hat{z} \end{pmatrix} \in P$ zuordnen.
Die Projektionen der Facetten K_i und E_i von P sind in der folgenden Skizze mit K_i' bzw. E_i' bezeichnet, die begrenzenden Hyperebenen von P' entsprechend mit H' .



Jede komplementäre Lösung von LK(M,q) hat wegen der Bedingung $w^T.z = 0$ höchstens k positive Komponenten. Die Nichtentartungsannahme (2.2.1) erzwingt nun, daß jede komplementäre Lösung genau k positive Komponenten hat und eine zulässige Basislösung des Systems $I \cdot w - M.z = q$ ist. Geometrisch gesehen stellt also jede komplementäre Lösung von LK(M,q) einen Extrempunkt von P dar (vgl. Dantzig [15], S. 154).
Im obigen Zahlenbeispiel besitzt LK(M,q) genau zwei komplementäre Lösungen, nämlich die Extrempunkte

$$E_2 = (3, 0, 0, 1)^T \quad \text{und} \quad E_3 = (0, 9, 5, 0)^T$$

des Polyeders P .

Wir interessieren uns außerdem für die fastkomplementären Punkte des Polyeders P. (Bei geometrischen Betrachtungen werden wir im folgenden statt "Lösung" synonym den Begriff "Punkt" verwenden).

(2.2.2) Definition: Eine fastkomplementäre Facette (F-Facette) der Klasse j ist eine Facette des Polyeders P , deren relatives Innere einen fastkomplementären Punkt der Klasse j enthält.

Im Beispiel ist offenbar K_3 eine fastkomplementäre Facette der Klasse 2, denn im relativen Inneren von K_3 liegt der Punkt $\frac{1}{2} \cdot (E_1 + E_3) = (0, \frac{21}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Man überprüft leicht, daß sogar alle Kanten von P F-Facetten sind.

Sei nun F eine fastkomplementäre Facette und $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ ein fastkomplementärer Punkt der Klasse j im relativen Inneren von F. Alle Punkte im relativen Innern von F sind ebenfalls fastkomplementär, denn sie haben die gleichen positiven Komponenten wie $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$. Punkte des relativen Randes von F liegen in den selben begrenzenden Hyperebenen von P wie $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$, zusätzlich jedoch in mindestens einer mehr. Diese Punkte erfüllen also ebenfalls die Bedingung $w^T \cdot z = w_j \cdot z_j$; liegen sie in einer der Hyperebenen $H(w_j)$ oder $H(z_j)$, so sind sie komplementär, ansonsten fastkomplementär der Klasse j.

Im Beispiel liegen alle Punkte von K_3 in der Hyperebene $H(w_1)$. $E_3 \in K_3$ liegt zusätzlich in $H(z_2)$ und ist daher komplementär; $E_1 \in K_3$ ist zusätzlich in der Hyperebene $H(z_1)$ enthalten und ist wie die Punkte im relativen Inneren von K_3 fastkomplementär der Klasse 2.

Wir halten fest:

(2.2.3) Lemma: Jeder Punkt einer F-Facette der Klasse j ist fastkomplementär der Klasse j oder komplementär.

Auch die Dimension von F-Facetten ist eindeutig bestimmt:

(2.2.4) Lemma: Jede fastkomplementäre Facette ist eine Kante von P.

Beweis: Da das Polyeder P durch $\binom{w}{z} \geq 0$ nach unten beschränkt ist, enthält jede Facette von P mindestens einen Extrempunkt.
Sei F eine fastkomplementäre Facette von P mit dem Extrempunkt $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$. Wäre die Dimension von F größer oder gleich zwei, so läge $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ in mindestens zwei begrenzenden Hyperebenen mehr als die Punkte im relativen Innern von F. Wegen des vorausgehenden Lemmas und der Nichtentartungsannahme liegt nun $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ in genau k begrenzenden Hyperebenen; die Punkte im relativen Innern von F müßten demnach mindestens k+2 positive Komponenten besitzen. Dies ist jedoch unvereinbar mit der Bedingung $w^T \cdot z = w_j \cdot z_j$.
Die Dimension von F ist also kleiner oder gleich eins. Da per definitionem das relative Innere einer F-Facette nicht leer ist, ist die Dimension von F-Facetten gleich eins.

Δ

Die Struktur der F-Facetten auf dem Polyeder P wird durch die folgende Feststellung weiter erhellt:

(2.2.5) Lemma: Jeder fastkomplementäre Extrempunkt $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ von P liegt in genau zwei F-Facetten.

Der Beweis von Lemma (2.2.5) ergibt sich sogleich aus Überlegungen, die von der geometrischen Veranschaulichung der Simplex-Methode her bekannt sind (vgl. Dantzig [15], S. 155):

Da $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ nichtentartet ist, liegt dieser Extrempunkt in genau k Kanten von P. Punkte im relativen Innern dieser Kanten haben genau k+1 positive Komponenten, nämlich diejenigen von $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ und eine weitere. Man vergewissert sich leicht, daß $\binom{w}{z}$ genau ein Paar komplementärer Variablen besitzt, die in $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ beide den Wert Null annehmen, und daß nur eine dieser beiden Variablen zusätzlich positiv sein kann, wenn die Bedingung $w^T \cdot z = w_j \cdot z_j$ weiterhin gelten soll. Genau zwei der k Kanten, in denen $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ liegt, sind also F-Facetten.

Entsprechend überlegt man sich die Gültigkeit von

(2.2.6) Lemma: Jeder komplementäre Extrempunkt von P liegt in genau k fastkomplementären Facetten, und jede dieser F-Facetten gehört einer anderen Klasse an.

Im vorausgegangenen Zahlenbeispiel (vgl. S. 13f) ist E_1 ein fastkomplementärer Extrempunkt der Klasse 2 und liegt in genau zwei F-Facetten dieser Klasse, nämlich in K_1 und in K_3. E_2 hingegen ist komplementär und liegt in einer F-Facette der Klasse 1 (K_4) und in einer der Klasse 2 (K_1).

Das Lemma (2.2.5) legt es nun nahe, eine Folge zusammenhängender F-Facetten zu betrachten:

(2.2.7) Definition: Ein F-Pfad der Klasse j ist eine alternierende Folge $t^1, F^1, t^2, F^2, \cdots$ von fastkomplementären oder komplementären Extrempunkten t^i und F-Facetten F^i der Klasse j mit der Eigenschaft:

(i) $t^i \in F^i$ $(i=1,2,\cdot\cdot)$

(ii) $t^{i+1} \in F^i$ $(i=1,2,\cdot\cdot)$

(iii) $t^{i+1} \neq t^i$ und $t^{i+1} \neq t^1$ $(i=1,2,\cdot\cdot)$

(iv) $F^{i+1} \neq F^i$. $(i=1,2,\cdot\cdot)$

Aus den Bedingungen (i) - (iv) folgt mit den Lemmata (2.2.4) und (2.2.5), daß jeder F-Pfad ein elementarer Kantenzug auf dem Polyeder P ist:
die Rückkehr zu einem Punkt t^i, $i \neq 1$, ist wegen Lemma (2.2.5) ausgeschlossen;

wird eine Facette F^j erreicht, die t^1 enthält, so bricht der Pfad ab, weil kein t^{j+1} existiert, das die Bedingung (iii) erfüllt.

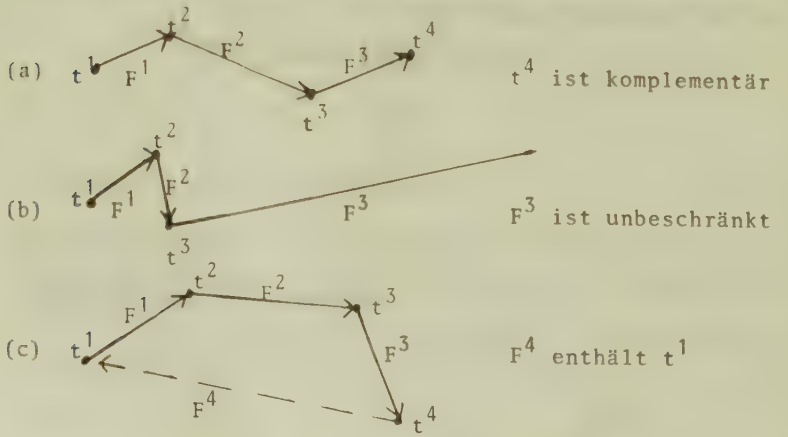
Da die Menge der fastkomplementären Extrempunkte des Polyeders P endlich ist, ist offenbar jeder F-Pfad endlich. Vergegenwärtigt man sich, daß jede F-Facette genau ein oder zwei Extrempunkte besitzt und daß diese Punkte fastkomplementär oder komplementär sind, so erkennt man die drei Möglichkeiten des Abbruchs eines F-Pfades:

(a) ein Extrempunkt t^i ist erreicht, der nur in einer F-Facette liegt (nämlich in F^{i-1}) :
t^i ist eine komplementäre Lösung;

(b) eine Facette F^i ist erreicht, die nur einen Extrempunkt besitzt (nämlich t^i) :
F^i ist eine unbeschränkte F-Facette;

(c) eine Facette F^i ist erreicht, die t^1 enthält.

Graphisch lassen sich die drei Typen fastkomplementärer Pfade auf dem Polyeder P folgendermaßen veranschaulichen:



Von Interesse sind insbesondere die Pfade vom Typ (a), denn nur sie führen zu einer komplementären Lösung. Den Fall (c) kann man durch die geeignete Wahl des Ausgangspunktes t^1 ausschließen:

(2.2.8) Lemma: Wird ein F-Pfad im Endpunkt t^1 einer unbeschränkten F-Facette F^o initiiert, und wählt man $F^1 \neq F^o$, so endet der Pfad entweder in einer unbeschränkten F-Facette $F \neq F^o$ (Fall (b)) oder aber in einer komplementären Lösung (Fall (a)).

Eine Schlüsselstellung nimmt der Fall (b) ein: Unter der Voraussetzung, daß man t^1 als Endpunkt einer unbeschränkten F-Facette wählt, läßt sich für einige Klassen von Matrizen (M,q) zeigen, daß der Fall (b) nicht auftritt, bzw. nur dann auftritt, wenn das Polyeder P leer ist (vgl. Abschnitt 3.2) . Offensichtlich wird dann eine komplementäre Lösung gefunden, falls eine existiert.

2.3 Komplementärpivot-Algorithmen

Rechentechnisch läßt sich die Wanderung entlang eines F-Pfades durch Pivot-Operationen im System $(I,-M)\cdot\binom{w}{z} = q$ bewerkstelligen. Ist $t^1 = \binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ eine fastkomplementäre Basislösung dieses Systems, so existiert genau ein Index h mit $\hat{w}_h = \hat{z}_h = 0$. Ein Pivotschritt in der Spalte von w_h oder z_h, der die Zulässigkeit des Systems bewahrt, entspricht der Wanderung entlang einer der beiden F-Facetten, in denen t^1 liegt. Hernach verfährt man nach folgender

(2.3.1) Pivot-Regel: Pivotiere in der Spalte derjenigen Variablen, deren komplementäre Variable im vorausgegangenen Schritt die Basis verlassen hat.

Die Initiierung im Endpunkt einer unbeschränkten F-Facette ist offenbar dann besonders einfach, wenn M eine positive Spalte $M_{\cdot j}$ enthält (vgl. Cottle-Dantzig [10], S. 109): man pivotiert im System $(I,-M)\cdot\binom{w}{z} = q$ in der Spalte von z_j derart, daß man eine zulässige Basislösung $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ erhält. Dabei verläßt eine Variable w_h die Basis. Sei h ungleich j (andernfalls wäre $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ bereits eine komplementäre Lösung). $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ ist also fastkomplementär der Klasse j und liegt in den beiden F-Facetten, die man durch Erhöhung von w_h bzw. z_h durchläuft. Man überlegt sich nun leicht, daß die w_h-Spalte im aktuellen Tableau negativ ist, daß also eine der beiden F-Facetten unbeschränkt ist

(vgl. Dantzig [15], S. 98).

Als Beispiel diene das Problem LK(M,q) mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Die erste Spalte von M ist positiv. Ein Pivotschritt in der Spalte von z_1 im Ausgangstableau

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	
1			-2	-4	8	4
	1		-1	1	-2	-4
		1	-3	5	0	-4

führt auf das Tableau der fastkomplementären Basislösung $(\hat{w}_2)^T = (12, 0, 8, 4, 0, 0)$:

1	-2		0	-6	12	12
	-1		1	-1	2	4
	-3	1	0	2	6	8

w_2 hat die Basis verlassen; es folgt ein Pivotschritt in der Spalte der komplementären Variablen z_2:

1	-11	3	0	0	30	36
	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	5	8
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	3	4

Dabei erhält w_3 den Wert Null; beim Pivotieren auf der zu w_3 komplementären Variablen z_3 verläßt w_1 die Basis, und man entnimmt dem Endtableau

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	
$\frac{1}{30}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{1}{10}$	0	0	1	$\frac{6}{5}$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	0	2
$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{2}{5}$

die komplementäre Basislösung

$$\bar{w}^T = (0, 0, 0) ; \quad \bar{z}^T = (2, \tfrac{2}{5}, \tfrac{6}{5}) .$$

Bemerkung: Verändert man das Beispiel nur geringfügig, indem man den Wert des Matrixelements M_{32} von -5 auf -2 setzt, so endet das Verfahren nicht in einer komplementären Lösung, sondern in einer unbeschränkten F-Facette.

2.4 Der Algorithmus von Lemke

Weist die Matrix M keine positive Spalte auf, so stellt sich wiederum die Frage der geeigneten Initiierung eines fastkomplementären Pfades. Lemke [58] schlug vor, das Problem LK(M,q) in ein Problem höherer Dimension einzubetten, für welches sich eine unbeschränkte fastkomplementäre Facette leicht angeben läßt.†
Man führt dazu eine weitere nichtnegative Variable z_o ein und betrachtet das Problem

LK(M,q,a): man bestimme einen Vektor $\binom{w}{z} \in R^{2k}$ mit der Eigenschaft

$$w = M \cdot z + a \cdot z_o + q \qquad (1a)$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0, \quad z_o \geq 0 \qquad (2a)$$

$$w^T \cdot z = 0 \qquad (3a)$$

$$z_o = 0, \qquad (4a)$$

wobei $a > 0$ ein vorgegebener k-Vektor ist (i.a. wählt man $a = e$).

Offensichtlich sind die Probleme LK(M,q) und LK(M,q,a) äquivalent. Bei der Suche nach einer Lösung des Problems

---

† analoge Techniken zur Erzielung primal bzw. dual zulässiger Basislösungen erörtern Dantzig ([15], S. 245f) und Simonnard ([90], S. 57f und S. 120ff).

LK(M,q,a) betrachtet Lemke nun nur solche Punkte des Polyeders

$$P_a := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \\ z_o \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; w = M \cdot z + a \cdot z_o + q \right\},$$

die die Bedingungen (1a), (2a), (3a) bereits erfüllen. Eine unbeschränkte Kante des Polyeders P_a, die diesen Anforderungen genügt, ist augenscheinlich

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \\ z_o \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_o + q \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Im Ursprung dieser Facette wird Lemkes Algorithmus initiiert.

(2.4.1) Der Algorithmus von Lemke

Voraussetzung: Gegeben sei ein lineares Komplementärproblem LK(M,q) sowie ein k-Vektor $a > 0$, der so gewählt ist, daß jede Lösung $\begin{pmatrix} w \\ z \\ z_o \end{pmatrix}$ des Systems (1a), (2a), (3a) mindestens k positive Komponenten besitzt. †

Schritt 0: Ist q_i nichtnegativ für alle i, STOP.

Kommentar: $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine komplementäre Lösung von LK(M,q).

---

† Tatsächlich ist "nahezu jeder" Vektor $a > 0$ geeignet (siehe Eaves [23], S. 616 und S. 633).

Schritt 1 : Man betrachte das Ausgangstableau

w	z	z_o	
I	-M	-a	q

;

man pivotiere in der Spalte von z_o und in der Zeile i mit $\frac{q_i}{a_i} = \min_j \frac{q_j}{a_j}$.

Kommentar: man erhält ein zulässiges Tableau.

Schritt 2 : Man betrachte die Spalte der Variablen, deren komplementäre Variable im vorausgegangenen Schritt Nichtbasisvarable geworden ist. Hat diese Spalte keine positive Eintragung, STOP.

Kommentar: Abbruch ohne Lösung von LK(M,q).

Schritt 3 : Man pivotiere in der betrachteten Tableauspalte so, daß die Zulässigkeit erhalten bleibt. Ist der Wert von z_o noch positiv, so gehe man zu Schritt 2.

Kommentar: andernfalls ist eine komplementäre Lösung von LK(M,q) erreicht. STOP.

Δ

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Schritte 0 - 3 ausführbar sind. Nachzuweisen bleibt, daß der Algorithmus auch tatsächlich abbricht.

Dazu betrachte man das lineare Komplementärproblem

LK($\bar{M},\bar{q}$) : man bestimme $(w^T, w_o, z^T, z_o)^T \in R^{2k+2}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} w \\ w_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & a \\ -e^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ z_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ G \end{pmatrix} \qquad (1b)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ w_o \end{pmatrix} \geq 0 , \quad \begin{pmatrix} z \\ z_o \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (2b)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ w_o \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} z \\ z_o \end{pmatrix} = 0 , \qquad (3b)$$

wobei G eine positive reelle Zahl ist.

Dieses Problem ist eines der aus Abschnitt 2.3 bekannten Probleme. Man erkennt, daß durch Erhöhung der Variablen z_o das System (1b) zulässig wird; eine Erhöhung von z_o darüber hinaus bedeutet geometrisch das Durchlaufen einer F-Facette der Klasse 0. Die Voraussetzung des Algorithmus' (2.4.1) hat nun zur Folge, daß jede fastkomplementäre Lösung der Klasse 0 nichtentartet ist. Initiiert man also einen F-Pfad der Klasse 0 im Ursprung dieser Facette und verfährt weiter wie im Abschnitt 2.3 beschrieben (Pivotregel (2.3.1)), so ist ein Abbruch des Verfahrens gesichert: entweder in einer komplementären Lösung oder aber in einer unbeschränkten F-Facette.

Letzteres läßt sich sogar ausschließen:

(2.4.2) Lemma: Sei $\hat{t} := (\hat{w}^T, G, 0^T, \hat{z}_0)^T$ der Ursprung der Facette $\hat{F} := \left\{ (w^T, G, 0^T, z_0)^T \geq 0 \;\middle|\; w = a \cdot z_0 + q \right\}$ des durch (1b) und (2b) gegebenen Polyeders und $h \in \{1,2,\cdots,k\}$ der Index, für den gilt $\hat{w}_h = 0$. Initiiert man einen F-Pfad der Klasse 0 in $\hat{t}$ durch einen Pivotschritt in der Spalte von z_h, so endet dieser Pfad in einer komplementären Lösung von $LK(\bar{M},\bar{q})$.

Beweis: Zu $\hat{F}$ kann der Pfad bekanntlich nicht zurückführen (vgl. Abschnitt 2.2). Endete der Pfad in einer unbeschränkten F-Facette $\bar{F} \neq \hat{F}$, dann gäbe es eine fastkomplementäre Lösung $\bar{t} \neq \hat{t}$ der Klasse 0, von der aus man durch Erhöhung einer Nichtbasisvariablen im zugehörigen Tableau zu den Punkten von $\bar{F}$ käme. Welche Variable könnte dies sein?
z_0 und w_0 sind beide in der Basis, denn sonst wäre bereits eine komplementäre Lösung erreicht;
eine der Variablen z_i, $i \neq 0$, scheidet ebenfalls aus, denn wegen der Bedingung $e^T \cdot z \leq G$ läßt sich kein z_i beliebig weit erhöhen;
ließe sich nun ein w_j, $j \neq 0$, beliebig weit erhöhen, dann gälte dies wegen der Beschränktheit von z auch für z_0; wegen $a > 0$ wäre entlang der fastkomplementären Facette $\bar{F}$ also der gesamte Vektor w positiv und notwendigerweise z gleich Null. Das hieße jedoch $\bar{F} = \hat{F}$, ein Widerspruch.

Δ

Man vergleiche nun die Pivot-Operationen im Tableau

T_1 :

w	w_o	z	z_o	
I	0	$-M$	$-a$	q
0^T	1	e^T	0	G

,

die dem Durchlaufen des oben betrachteten F-Pfades der Klasse O entsprechen, mit den Pivot-Operationen, die Lemkes Algorithmus im Tableau

T_2 :

w	z	z_o	
I	$-M$	$-a$	q

durchführt. Offensichtlich stimmen die Pivotelemente und Basisvariablen (bis auf die zusätliche Variable w_o im Tableau T_1) solange überein, wie die Restriktion $e^T \cdot z \leq G$ nicht "bindend" wird, d.h. solange wie die Variable $w_o = G - e^T \cdot z$ positiv bleibt. Aus diesem Grunde wähle man die Konstante G so groß, daß alle Extrempunkte des Polyeders

$$P_a = \left\{ (w^T, z^T, z_o)^T \geq 0 \;\middle|\; w = M \cdot z + a \cdot z_o + q \right\}$$

die Bedingung $e^T \cdot z < G$ erfüllen.

Wird $e^T \cdot z \leq G$ nun während des Verfahrens im Tableau T_1 bindend, so erfolgt ein Abbruch in einer komplementären Lösung t^c von $LK(\bar{M}, \bar{q})$ mit $w_o^c = 0$, $z_o^c > 0$; dies entspricht im Tableau T_2 dem Abbruch von Lemkes Algorithmus im Schritt 2, denn die Projektion von t^c in den Raum der

Variablen $\begin{pmatrix} w \\ z \\ z_o \end{pmatrix}$ ist offensichtlich ein Punkt auf einer unbeschränkten Kante von P_a .

Wird $e^T.z \leq G$ während des Verfahrens im Tableau T_1 nicht bindend, so erfolgt wegen Lemma (2.4.2) ebenfalls ein Abbruch in einer komplementären Lösung von $LK(\bar{M},\bar{q})$, diesmal mit $w_o > 0$, $z_o = 0$; dies entspricht einem Abbruch von Lemkes Algorithmus im Schritt 3 .

3. Mathematische Ergebnisse der Komplementärtheorie

3.1 Zur Existenz von Lösungen des Problems LK(M,q) für spezielle Klassen von Matrizen (M,q)

Die Komplementärtheorie hat sich intensiv mit Klassen von Matrizen (M,q) beschäftigt, für die eine Lösung des Problems LK(M,q) existiert, sowie mit denjenigen Teilklassen, für welche ein Komplementärpivot-Algorithmus angegeben werden kann, der das Problem LK(M,q) "verarbeitet", d.h. eine komplementäre Lösung bestimmt oder aber feststellt, daß keine Lösung existiert.
Besondere Beachtung fanden die Klassen P, Q und K , $P \subset Q \subset K$, von Matrizen M, die folgendermaßen definiert sind (siehe Lemke [59] und Murty [72]):

M ist eine P-Matrix ($M \in P$), wenn LK(M,q) für jeden Vektor $q \in R^k$ genau eine komplementäre Lösung besitzt.

M ist eine Q-Matrix ($M \in Q$), wenn LK(M,q) für jeden Vektor $q \in R^k$ eine komplementäre Lösung besitzt.

M ist eine K-Matrix ($M \in K$), wenn gilt:
ist das Problem LK(M,q) zulässig, dann hat es auch eine komplementäre Lösung.

Eine notwendige und hinreichende Charakterisierung der Klasse P stammt von Samelson et al. [84]:

(3.1.1) Satz: M ist genau dann eine P-Matrix, wenn jede Hauptminore † von M positiv ist.

Eine entsprechende Charakterisierung der Klassen Q und K ist bis heute nicht gelungen. Für eine Teilklasse von Q fand Murty [72]:

(3.1.2) Satz: $M \geq O$ ist genau dann eine Q-Matrix, wenn für alle $i=1,2,\cdot\cdot,k$ M_{ii} positiv ist.

Eine hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit einer Matrix zur Klasse Q gab Ingleton [50] bereits 1966 an:

(3.1.3) Satz: Sind alle Hauptminoren von M ungleich Null und existiert ein Vektor $\hat{q} > 0$, so daß LK(M,$\hat{q}$) eine eindeutige Lösung hat, dann gehört M zur Klasse Q.

Dieses Ergebnis ist von Murty und Saigal unter dem Aspekt der "constant parity property" verallgemeinert worden:

---

† Ist M eine reelle k×k-Matrix und $\alpha \subseteq \{1,2,\cdot\cdot,k\}$, dann nennt man die Determinante $|M_{\alpha\alpha}|$ eine Hauptminore von M.

(3.1.4) Satz (Murty [72]): Sind alle Hauptminoren von M ungleich Null, dann hat die Anzahl der Lösungen von LK(M,q) dieselbe Parität (gerade bzw. ungerade) für alle q, für die LK(M,q) nichtentartet ist.

(3.1.5) Satz (Saigal [82]): Hat LK(M,0) eine eindeutige Lösung und existiert ein $\hat{q} \in R^k$, so daß LK(M,$\hat{q}$) eine ungerade Anzahl nichtentarteter Lösungen besitzt, dann ist die Anzahl der Lösungen von LK(M,q) ungerade für alle q, für die LK(M,q) nichtentartet ist.

(3.1.6) Satz (Saigal [82]): Existiert ein Vektor $z > 0$, so daß $z^T \cdot M < 0$ gilt, dann hat LK(M,q) eine gerade Anzahl von Lösungen für alle q, für die LK(M,q) nichtentartet ist.

Saigal gab außerdem Klassen von Matrizen (M,q) an, für die das Problem LK(M,q) genau zwei Lösungen hat. Dazu definieren wir zunächst die Klassen Z und N von Matrizen M:

M ist eine Z-Matrix ($M \in Z$), wenn für alle $i \neq j$ gilt: $M_{ij} \leq 0$.

M ist eine N-Matrix ($M \in N$), wenn alle Hauptminoren von M negativ sind.

(3.1.7) Satz (Saigal [83]): Sei $M \in Z$, jede Hauptminore von M ungleich Null, $M_{ii} > 0$ für alle i, aber M keine P-Matrix. Für jeden Vektor q, für den LK(M,q) nichtentartet ist und eine Lösung besitzt, existieren genau zwei Lösungen von LK(M,q).

(3.1.8) Satz (Saigal [83]): Sei $M \in N$ und existiere $z \geq 0$ mit $z^T \cdot M \leq 0$. Für jeden Vektor $q > 0$, für den LK(M,q) nichtentartet ist, gibt es genau zwei Lösungen von LK(M,q).

3.2 Zur Bestimmbarkeit von Lösungen des Problems LK(M,q) für spezielle Klassen von Matrizen (M,q)

Im Laufe der vergangenen zehn Jahre konnte für viele Teilklassen von K gezeigt werden, daß ein geeigneter Komplementärpivot-Algorithmus eine komplementäre Lösung des zugehörigen linearen Komplementärproblems bestimmt.
Wir definieren zunächst einige dieser Klassen, bevor wir auf ihre Beziehungen untereinander näher eingehen. Es werden dabei die üblichen mnemotechnischen Abkürzungen eingeführt (vgl. Karamardian [53]).

M heißt <u>positiv semidefinit</u> ($M \in PSD$), wenn gilt:
$z^T \cdot M \cdot z \geq 0$ für alle $z \in R^k$.

M heißt <u>positiv definit</u> ($M \in PD$), wenn gilt:
$z^T \cdot M \cdot z > 0$ für alle $z \neq 0$.

M heißt <u>streng kopositiv</u> ($M \in SCP$), wenn gilt:
$z^T \cdot M \cdot z > 0$ für alle $0 \neq z \geq 0$.

M heißt <u>kopositiv plus</u> ($M \in CPP$), wenn gilt
$z^T \cdot M \cdot z \geq 0$ für alle $z \geq 0$ und wenn aus
$z^T \cdot M \cdot z = 0$ auch $(M + M^T) \cdot z = 0$ folgt.

M heißt <u>streng semimonoton</u> ($M \in SSM$), wenn es für jeden Vektor $0 \neq z \geq 0$ einen Index i gibt mit $z_i > 0$ und $M_{i.} \cdot z > 0$.

M heißt <u>vom Typ L</u> ($M \in L$) †, wenn für alle $0 \neq z \geq 0$ folgendes gilt:

a) es gibt einen Index i mit $z_i > 0$, $M_{i.} \cdot z \geq 0$;

b) ist $M \cdot z \geq 0$ und $z^T \cdot M \cdot z = 0$ erfüllt, dann existieren Diagonalmatrizen $\Lambda \geq 0$, $\Omega \geq 0$ mit $(\Lambda \cdot M + M^T \cdot \Omega) \cdot z = 0$.

Die Beziehungen $PD \subset PSD$, $PD \subset SCP$ und $SCP \subset SSM$ ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen dieser Klassen.

---

† Die Bezeichnung stammt von Eaves [23]; vermutlich steht "L" für "large".

Die Klasse CPP wurde von Lemke [58] eingeführt, der auch auf die Beziehung $PSD \subset CPP$ hinwies. Lemke zeigte, daß $M \in CPP$ eine K-Matrix ist, indem er bewies, daß sein Algorithmus das Problem LK(M,q) für $M \in CPP$ verarbeitet. Wir erhalten also die Beziehung

$$PD \subset PSD \subset CPP \subset K ,$$

wobei für $M \in CPP$ Lemkes Algorithmus feststellt, ob das Problem LK(M,q) eine Lösung besitzt und diese gegebenenfalls auch berechnet.

Die Klasse SSM wurde zuerst von Cottle und Dantzig ([10], S. 119) betrachtet, wenn auch unterschiedlich charakterisiert; (die Äquivalenz wies Eaves ([23], S. 622) nach). Sie zeigten, daß für $M \in SSM$ das Problem LK(M,q) eine Lösung besitzt, die mit Lemkes Algorithmus bestimmt werden kann. Es gilt demnach:

$$PD \subset SCP \subset SSM \subset Q .$$

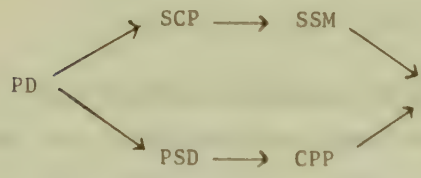
Eaves [23] definierte die Klasse L, die sowohl SSM als auch CPP umfaßt; er zeigte, daß für $M \in L$, $a > 0$ Lemkes Algorithmus das Problem LK(M,q) verarbeitet.

1973 fand Garcia [36], daß bei geeigneter Wahl des Vektors a Lemkes Algorithmus das Problem LK(M,q) auch dann noch verarbeitet, wenn M nicht aus L ist, sondern aus der etwas größeren Klasse $L(a) := E(a) \cap E(0)$ mit $a > 0$ und

$M \in E(c)$ g.d.w. gilt: Ist $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$, $\hat{z} \neq 0$, eine Lösung von $LK(M,c)$, dann existiert $x \neq 0$ mit $w \geq -M^T \cdot x \geq 0$ und $z \geq x \geq 0$.

L(a) ist zwar eine echte Obermenge von L, jedoch immer noch eine echte Teilmenge von K (vgl. Garcia [36], S. 303).

Einige wichtige Klassen von Matrizen M, für die Lemkes Algorithmus das Problem LK(M,q) verarbeitet, sind also:



Saigal [81] zeigte, daß Lemkes Algorithmus eine komplementäre Lösung des Problems LK(M,q) auch dann bestimmt, wenn LK(M,q) zulässig ist und $M \in Z^{\dagger}$ gilt.

Wir wollen schließlich noch eine Teilklasse von K erwähnen, die von einiger ökonomischer Bedeutung ist (vgl. insbesondere die Abschnitte 4.3.2, 4.4 und 4.7.1).
Es handelt sich hierbei um Matrizen, die auch von Eaves ([23], S. 627 ff) in einem allgemeineren Zusammenhang betrachtet wurden.

---

† vgl. die Definition der Klasse Z auf S. 34 .

(3.2.1) Satz: Sei LK(M,q) ein lineares Komplementärproblem

mit $M = \begin{pmatrix} R & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$,

Ist das Polyeder $\{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$ beschränkt, so liegt M in K, d.h.: hat das System $w = M \cdot z + q$ eine nichtnegative Lösung, so existiert auch eine komplementäre Lösung.

Ferner läßt sich ein Komplementärpivot-Algorithmus angeben, der LK(M,q) verarbeitet.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß Lemkes Algorithmus das Problem $LK(\bar{M},\bar{q},a)$ verarbeitet, wobei gilt:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} R & A^T & e \\ -A & 0 & 0 \\ -e^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ G \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

und G eine positive Zahl ist.

Dann folgern wir aus der Beschränktheit der Menge $\{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$, daß für große G und jede komplementäre Lösung $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ von $LK(\bar{M},\bar{q},a)$ $\hat{z}^3 = 0$ gilt, womit offensichtlich $((\hat{w}^1)^T,(\hat{w}^2)^T,(\hat{z}^1)^T,(\hat{z}^2)^T)^T$ eine komplementäre Lösung von LK(M,q) ist.

Annahme: Lemkes Algorithmus, angewandt auf $LK(\bar{M},\bar{q},a)$, bricht ab, weil eine unbeschränkte Facette F_u erreicht ist.

F_u ist ein Extremstrahl des Polyeders

$$\bar{P}_a = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \\ z_o \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; w = \bar{M} \cdot z + a \cdot z_o + q \right\}$$

und läßt sich bekanntlich in folgender Form darstellen:

$$F_u = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \\ \bar{z}_o \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \\ \hat{z}_o \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \geq 0 \right\} ;$$

hierbei ist $\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \\ \bar{z}_o \end{pmatrix}$ ein Extrempunkt von $\bar{P}_a$ und $0 \neq \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \\ \hat{z}_o \end{pmatrix} \geq 0$ eine Lösung des homogenen Systems $w = \bar{M} \cdot z + a \cdot z_o$. Es gilt daher:

(1a) $\bar{w}^1 = R \cdot \bar{z}^1 + A^T \cdot \bar{z}^2 + e \cdot \bar{z}^3 + a^1 \cdot \bar{z}_o + c \geq 0$

(1b) $\bar{w}^2 = -A \cdot \bar{z}^1 + a^2 \cdot \bar{z}_o + b \geq 0$

(1c) $\bar{w}^3 = -e^T \cdot \bar{z}^1 + G \geq 0$

(2a) $\hat{w}^1 = R \cdot \hat{z}^1 + A^T \cdot \hat{z}^2 + e \cdot \hat{z}^3 + a^1 \cdot \hat{z}_o \geq 0$

(2b) $\hat{w}^2 = -A \cdot \hat{z}^1 + a^2 \cdot \hat{z}_o \geq 0$

(2c) $\hat{w}^3 = -e^T \cdot \hat{z}^1 \geq 0$

sowie die Komplementärbedingung

(3) $(\bar{w} + \lambda \cdot \hat{w})^T \cdot (\bar{z} + \lambda \cdot \hat{z}) = 0$ für alle $\lambda \geq 0$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß (3) äquivalent ist mit:

(3') $\bar{w}^T \cdot \bar{z} = \hat{w}^T \cdot \bar{z} = \hat{w}^T \cdot \hat{z} = \bar{w}^T \cdot \hat{z} = 0$.

Aus (2c) folgt sofort:

(4) $\hat{z}^1 = 0$.

Sei $\hat{z}_0 > 0$; aus (2b),(4) folgt $\hat{w}^2 > 0$,

aus (3') folgt $\hat{z}^2 = 0$ und $\bar{z}^2 = 0$,

aus (2a) folgt $\hat{w}^1 > 0$,

aus (3') folgt $\bar{z}^1 = 0$,

aus (1c) folgt $\bar{w}^3 > 0$,

aus (3') folgt $\bar{z}^3 = 0$;

dann wäre der gesamte Vektor $\bar{z}$ identisch Null und also $(\bar{w}^T, \bar{z}^T, \bar{z}_0)^T$ derjenige Extrempunkt von $\bar{P}_a$, in dem Lemkes Algorithmus initiiert wurde. Eine Rückkehr zu diesem Punkt ist jedoch nicht möglich (vgl. Abschnitt 2.4); es gilt daher:

(5) $\hat{z}_0 = 0$.

Nun impliziert (4): $(\bar{M} + \bar{M}^T) \cdot \hat{z} = (R + R^T) \cdot \hat{z}^1 = 0$,

und aus $\hat{w} = \bar{M} \cdot \hat{z} + a \cdot \hat{z}_0 \geq 0$ und (5) folgt:

(6) $\hat{z}^T \cdot \bar{M} \leq 0$.

Andererseits gilt:

$0 = \bar{z}^T \cdot \hat{w} = \bar{z}^T \cdot \bar{M} \cdot \hat{z}$ und daher auch

$$0 = \hat{z}^T \cdot \bar{w} = \hat{z}^T \cdot \bar{M} \cdot \bar{z} + \hat{z}^T \cdot a \cdot \bar{z}_0 + \hat{z}^T \cdot \bar{q}$$

$$= \hat{z}^T \cdot \bar{w} + \bar{z}^T \cdot \hat{w} = \bar{z}^T \cdot (\bar{M} + \bar{M}^T) \cdot \hat{z} + \hat{z}^T \cdot a \cdot \bar{z}_0 + \hat{z}^T \cdot \bar{q}$$

$$= \hat{z}^T \cdot a \cdot \bar{z}_0 + \hat{z}^T \cdot \bar{q}.$$

Somit wissen wir:

(7) $\xi^T \cdot a \cdot \bar{z}_o \geq 0$ und $\xi^T \cdot \bar{q} \leq 0$.

Wegen (4),(5) und $\begin{pmatrix} w \\ \xi \\ \zeta_o \end{pmatrix} \neq 0$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}$ ungleich Null.

$\xi^2 = 0 \Longrightarrow \xi^3 \neq 0 \Longrightarrow \xi^T \cdot \bar{q} = \xi^3 \cdot G > 0$,

was im offensichtlichen Widerspruch zu (7) steht. Also ist $\xi^2 \neq 0$. Da $\bar{z}_o$ positiv ist (sonst wäre der Algorithmus bereits mit einer komplementären Lösung abgebrochen), folgt $\xi^T \cdot a \cdot \bar{z}_o > 0$ und somit:

(8) $\xi^T \cdot \bar{q} < 0$.

Farkas' Lemma (siehe z.B. Mangasarian [64], S. 31) besagt aber, daß die Existenz eines Vektors $\xi \geq 0$, der (6) und (8) löst, gleichbedeutend damit ist, daß das System

$$w = \bar{M} \cdot z + \bar{q} , \qquad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \geq 0$$

keine Lösung besitzt.

Wir haben also gezeigt, daß Lemkes Algorithmus eine Lösung des Problems $LK(\bar{M},\bar{q},a)$ (und damit auch von $LK(\bar{M},\bar{q})$) bestimmt, sofern $LK(\bar{M},\bar{q})$ zulässig† ist. Ist nun zusätzlich die Menge $Q = \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$ beschränkt, so existiert ein Vektor U mit $U > x$ für alle $x \in Q$. Man wähle $G := e^T \cdot U$. Hat $LK(\bar{M},\bar{q})$ keine zulässige Lösung, so hat offenbar auch das

---

† vgl. die Definition der Zulässigkeit linearer Komplementärprobleme auf S. 11 .

Problem LK(M,q) keine, denn jede zulässige Lösung von LK(M,q) erfüllte auch die Restriktion $G - e^T \cdot z^1 \geq 0$.

Ist andererseits $LK(\bar{M},\bar{q})$ zulässig, so ist in jeder komplementären Lösung $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ dieses Problems $\hat{w}^3 = -e^T \cdot \hat{z}^1 + G$ positiv; es folgt $\hat{z}^3 = 0$ und daher ist durch $((\hat{w}^1)^T, (\hat{w}^2)^T, (\hat{z}^1)^T, (\hat{z}^2)^T)^T$ eine komplementäre Lösung von LK(M,q) gegeben.

Δ

(3.2.2) Korollar: Gilt $b \geq 0$ zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz (3.2.1), so läßt sich auf die dort dargestellte Weise stets eine komplementäre Lösung von LK(M,q) bestimmen.

Beweis: Die Bedingung (8): $\hat{z}^T \cdot \bar{q} = (\hat{z}^2)^T \cdot b < 0$ ist nie erfüllt.

Bei Verwendung eines aufwendigeren Algorithmus' lassen sich die Voraussetzungen dieses Korollars noch abschwächen:

(3.2.3) Satz: Seien M und q wie in Satz (3.2.1) vorgegeben, $b \geq 0$ und die Funktion $x^T \cdot R \cdot x + c^T \cdot x$ auf der Menge $\{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$ nach unten beschränkt. Dann existiert ein Komplementärpivot-Algorithmus, der eine komplementäre Lösung von LK(M,q) bestimmt.

Zum Beweis verweisen wir auf Eaves ([23], S. 630).

4. Ökonomische Probleme als lineare Komplementärprobleme: Formulierung und Lösung

Im folgenden Kapitel wird eine Vielzahl linearer Komplementärprobleme LK(M,q) mit unterschiedlichsten Matrizen (M,q) erörtert. Aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung wurde dabei auf eine Indizierung von (M,q) weitgehend verzichtet. Sofern keine weiteren Angaben gemacht worden sind, bezieht sich LK(M,q) stets auf die zuletzt definierten Daten (M,q) .

4.1 Lineare und quadratische Programme

Ein quadratisches Programm (mit linearen Nebenbedingungen) läßt sich in der folgenden Form darstellen:

$$(QP): \quad \text{minimiere} \quad c^T \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot D \cdot x$$

$$\text{über} \quad \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\} \quad ;$$

dabei ist D eine (o.E. symmetrische) n×n-Matrix, c und x sind n-Vektoren und D ist ein m-Vektor.

Jede Optimallösung von (QP) erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingungen (vgl. Mangasarian [64] , S. 94) :

$$u := D \cdot x + A^T \cdot y + c$$

$$v := -A \cdot x + b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Oder anders ausgedrückt: Hat (QP) eine optimale Lösung, so ist diese unter den Lösungen des linearen Komplementärproblems LK(M,q) mit $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} D & A^T \\ -A & O \end{pmatrix}$ zu finden.

In vielen praktischen Erscheinungsformen des Problems (QP) sind die Kuhn-Tucker Bedingungen sogar hinreichend für ein Optimum; dann entspricht jeder Lösung des linearen Komplementärproblems auch eine Lösung des quadratischen Programms. Bekanntlich ist dies z.B. dann der Fall, wenn die Zielfunktion konvex ist, d.h. wenn die Matrix D positiv semidefinit ist. Dann ist aber wegen

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} D & A^T \\ -A & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1)^T \cdot D \cdot x^1$$

auch die Matrix M positiv semidefinit und wir folgern aus Abschnitt 3.2:

(4.1.1) Satz: Ist die Zielfunktion eines quadratischen Programms (QP) konvex, so existiert mindestens eine optimale Lösung von (QP), die mit dem Algorithmus von Lemke bestimmt werden kann.

Rechenerfahrungen mit Lemkes Algorithmus, angewandt auf quadratische Optimierungsprobleme mit konvexer Zielfunktion, sind außerordentlich erfreulich. Im Systems Optimization Laboratory der Universität Stanford wurde (unter Verwendung der Produktform der Inversen) der Code NULEMKE entwickelt und auf einer UNIVAC 1108 getestet. Ein praktisches Problem aus der Baustatik, bei dem die Matrix M die Ordnung 130 hatte, wurde in .14 Sekunden nach 20 Iterationen gelöst. Zu Testzwecken wurde der Vektor q durch die Vektoren -q bzw. -M·e ersetzt und das Problem erneut gerechnet. Hierfür waren 105 bzw. 130 Iterationen erforderlich; die Rechenzeit lag in beiden Fällen unter 4 Sekunden (vgl. Cottle [9], S. 5).
Hartmann und Reiser [47] verglichen an zufällig erzeugten Beispielen den Rechenaufwand zur Lösung von (QP) - unter der Voraussetzung konvexer Zielfunktionen - in Abhängigkeit von der Struktur des Problems bei Verwendung der Algorithmen von Beale und von Lemke. Dabei zeigte es sich, daß die Struktur des Problems auf die Rechenzeit des Beale-Algorithmus' einen stärkeren Einfluß hat als auf die des Lemke-Algorithmus' (vgl. Hartmann-Reiser [47], S. B60-B62).

Im Falle $D=0$ ist (QP) offenbar ein lineares Programm. Ein Vergleich des Simplex-Algorithmus' mit Lemkes Algorithmus, angewandt auf lineare Programme, wurde von Ravindran [77] , [78] anhand von über 170 zufällig erzeugten Beispielen durchgeführt. Dabei wurde eine deutliche Überlegenheit von Lemkes Algorithmus festgestellt: "In our tests the complementary pivot method shows a definite superiority over the simplex method both with regard to the number of iterations and computation time" (Ravindran [78] , S. 95). Interessanterweise zeigte sich Lemkes Algorithmus dann besonders stark überlegen, wenn viele Elemente der Matrix A negativ waren.

Ist die Zielfunktion nicht konvex, so ist man häufig daran interessiert, wenigstens einen Punkt zu bestimmen, der die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt. Für den Fall, daß das Polyeder $Q = \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$ beschränkt ist, gibt Satz (3.2.1) im Abschnitt 3.2 ein Verfahren an, welches einen Kuhn-Tucker-Punkt bestimmt oder aber feststellt, daß das Polyeder Q leer ist.

Wählt man einen allgemeineren Ansatz, so sind jedoch keinerlei Voraussetzungen über das Polyeder Q erforderlich. Eaves [24] , [23] zeigte, daß sein Verfahren mit einem der folgenden drei Resultate abbricht:

(a) Das Polyeder Q ist leer;

(b) eine komplementäre Lösung (Kuhn-Tucker-Punkt) ist gefunden;

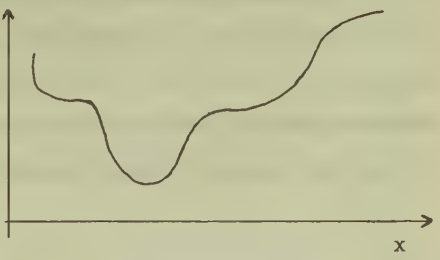
(c) ein Extremstrahl von Q ist identifiziert, in dessen Richtung die Zielfunktion von (QP) unbeschränkt ist.

4.2 Pseudokonvexe Programme

In der Wirtschaftstheorie und im Operations Research sind konvexe Funktionen von besonderer Bedeutung. Viele der interessanten Theoreme, welche ursprünglich unter Konvexitätsannahmen hergeleitet wurden, gelten hingegen auch unter den schwächeren Annahmen der Pseudokonvexität oder der Quasikonvexität (vgl. Mangasarian [64] S. 131ff). In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit zwei speziellen Typen pseudokonvexer Funktionen.

(4.2.1) Definition (Cottle-Ferland [11] , S. 96) :
Sei S eine konvexe Teilmenge des R^n und $f: S \to R$ eine reellwertige, über S differenzierbare Funktion. f heißt pseudokonvex über S, wenn für alle $x^1, x^2 \in S$ gilt:
$\nabla f(x^1) \cdot (x^2 - x^1) \geq 0 \Rightarrow f(x^2) \geq f(x^1)$ †.

Der nebenstehende Graph veranschaulicht zum Beispiel eine pseudokonvexe Funktion:



Ein pseudokonvexes Programm (PKP) ist ein Optimierungsproblem in folgender Form:

(PKP) : minimiere $f(x)$

über $S := \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$,

wobei $f(x)$ differenzierbar und pseudokonvex über S ist.

---

† Sei $\hat{y} \in S \subset R^n$ und $f: S \to R$ differenzierbar.
Der Zeilenvektor $\nabla f(\hat{y}) := \left(\frac{\partial f(\hat{y})}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f(\hat{y})}{\partial y_n}\right)$
bezeichnet den Gradienten von $f(y)$ an der Stelle $\hat{y}$
(vgl. Mangasarian [64] , S. 201).

Die Bedeutung von (PKP) liegt in der Tatsache begründet, daß jeder Punkt, der die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt, ein globales Optimum liefert, ganz so, als sei $f(x)$ konvex (vgl. Mangasarian [64], S. 153).
Leider ist es im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden festzustellen, ob eine gegebene Funktion $f(x)$ pseudokonvex ist oder nicht. Die Definition jedenfalls erfordert a priori die Prüfung einer unendlichen Anzahl von Bedingungen. In den beiden folgenden wichtigen Spezialfällen ist dieses Problem jedoch gelöst.

4.2.1 Pseudokonvexe Programme mit quadratischer Zielfunktion

Wir betrachten quadratische Programme † mit pseudokonvexer Zielfunktion. Es stellen sich zwei Probleme:

1. Gegeben sei die Matrix (D,c). Wie stellt man fest, ob die Funktion $f(x) = c^T \cdot x + x^T \cdot D \cdot x$ pseudokonvex ist?
2. Sei $f(x) = c^T \cdot x + x^T \cdot D \cdot x$ pseudokonvex. Wie bestimmt man eine Lösung von (PKP) ?

ad 1.: Aufbauend auf den Resultaten von Martos [67], [68] gaben Cottle und Ferland [11], [12] notwendige und hinreichende Bedingungen für die Pseudokonvexität einer nichtkonvexen quadratischen Funktion an. Ihre Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:
Aus den Sätzen 2 und 5 von Martos [67] und den Sätzen 4.1 und 4.2 von Cottle-Ferland [12] ergibt sich :

---

† vgl. das Problem (QP) von S. 44.

(4.2.1.1) Satz: Die nichtkonvexe quadratische Form $x^T \cdot D \cdot x$ ist pseudokonvex über $R_+^n \setminus \{0\}$, g.d.w. gilt:

a) $D \leq 0$,

b) D hat nichtnegative Hauptminoren,

c) D besitzt keine Spalte (oder Zeile), die identisch Null ist.

Für den Fall $c \neq 0$ folgert man aus den Ergebnissen von Cottle und Ferland (Satz 4.1, Satz 4.2 in [12] sowie Satz 1 in [11]) :

(4.2.1.2) Satz: Die nichtkonvexe quadratische Funktion $f(x) = c^T \cdot x + x^T \cdot D \cdot x$, $c \neq 0$, ist genau dann pseudokonvex über dem nichtnegativen Orthanten R_+^n, wenn $D' := \begin{pmatrix} D & c \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$ die Bedingungen a) und b) von Satz (4.2.1.1) erfüllt.

Vom Standpunkt der quadratischen Optimierung liegt die Bedeutung dieser beiden Sätze darin, daß "there is a (finitely testable) class of nonconvex objective functions for which Kuhn-Tucker stationary points yield global minima". (Cottle und Ferland [11], S. 100).

ad 2: Auch das Problem der Bestimmung einer Optimallösung eines quadratischen Programms mit pseudokonvexer Zielfunktion ist gelöst. Zwar ist Lemkes Algorithmus nicht geeignet, eine Optimallösung eines beliebigen solchen

Programms zu finden,† er läßt sich jedoch so modifizieren, daß er das Problem LK(M,q) mit

$M = \begin{pmatrix} D & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ und $c^T \cdot x + x^T \cdot D \cdot x$ pseudokonvex verarbeitet (vgl. Mylander [74]).

4.2.2 Programme mit gebrochener Zielfunktion: Ein Beispiel aus der Portfolio Selection Theorie

Wir betrachten das Portfolio Selection Problem eines Investors, der einen Betrag von $\bar{x} > 0$ Geldeinheiten (GE) über eine Periode hinweg investieren will und dem dafür n Anlagemöglichkeiten zur Verfügung stehen. Werden x_i GE in die Anlagemöglichkeit i investiert, dann erwächst daraus zum Ende der Periode der Betrag $\xi_i \cdot x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Es sei $x := (x_1,..,x_n)^T$, $\xi := (\xi_1,..,\xi_n)^T$.
In Vektorschreibweise beträgt das Endvermögen der Periode also $y = \xi^T \cdot x$. Ferner sei die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(\xi_1,..,\xi_n)$ der Zufallsvariablen ξ_i unabhängig von der absoluten Größe der x_i, und der Investor habe eine Nutzenfunktion $u(y)$, die folgenden Bedingungen genügt: (vgl. Ziemba et al. [99] , S. 209):

a) $u(y)$ ist stetig differenzierbar,

b) $u(y)$ ist schwach monoton wachsend und konkav, (der Anleger ist "risikoscheu", vgl. Tobin [92] ,S.75).

---

† Mylander ([74] , S.46) gibt ein Beispiel dafür an, daß Lemkes Algorithmus in einer unbeschränkten F-Facette abbricht, obgleich eine eindeutige Optimallösung existiert.

c) Die Erwartungswerte von Nutzen und Grenznutzen sind beschränkt.

Das Ziel des Investors ist es nun, den Erwartungswert (bzgl. ξ) seines Nutzens zu maximieren, d.h. er löst das Optimierungsproblem (NMP):

$$\text{(NMP):}\quad \max_{x} \; E(u(\xi^T \cdot x))$$

$$\text{über} \qquad \{x \geq 0 \mid e^T \cdot x = \bar{x}\} \; .$$

Das Problem (NMP) ist recht allgemein. Unter zusätzlichen Annahmen wurden in der Literatur die unterschiedlichsten Lösungsansätze diskutiert; einen knappen Überblick geben Ziemba et al. ([99],S. 210); sie schlagen ein weiteres Verfahren vor, das sich eng an die Arbeiten von Tobin [92] und Lintner [62] anfügt.

Tobin [92] zeigte unter den beiden zusätzlichen Annahmen:

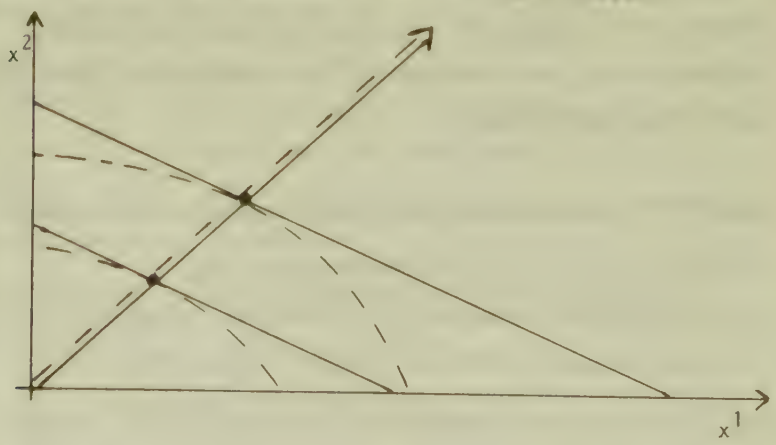
a) $F(\xi_1,..,\xi_n)$ ist eine Normalverteilung,

b) es besteht eine weitere, risikofreie Anlagemöglichkeit, genannt "monetary asset" (Tobin [92], S.66),

daß allen oben betrachteten Nutzenfunktionen die folgenden Präferenzvorstellungen des Anlegers zugrunde liegen: Stimmen die Erwartungswerte des Ertrages zweier Portefeuilles $\hat{x}$ und x' überein, so wird dasjenige mit der geringsten Standardabweichung vorgezogen.

Haben zwei Portefeuilles x und x' die gleiche Standardabweichung, so wird dasjenige vorgezogen, welches die größte Ertragserwartung besitzt.
Portefeuilles, die für einen vorgegebenen Erwartungswert des Ertrages eine minimale Standardabweichung besitzen (bzw. für vorgegebene Standardabweichung eine maximale Ertragserwartung) nennen wir mit Markowitz [66] "effizient".
Tobin [92] führte den Nachweis, daß unter den von ihm gemachten Annahmen die effizienten Portefeuilles auf einem Strahl durch den Ursprung liegen.

Für den Fall zweier risikobehafteter Anlagemöglichkeiten verdeutlichen wir den Sachverhalt an einer Skizze:



———— : Portefeuilles gleicher Ertragserwartung

- - - - - - - - - - : Portefeuilles gleichen Risikos (gleicher Standardabweichung)

———— : effiziente Portefeuilles

In effizienten Portefeuilles ist das Mischungsverhältnis der risikobehafteten Anlagen untereinander also unabhängig von dem absoluten Geldbetrag, der darin investiert wird. Der streng konkave (hyperbolische) Verlauf der Flächen, auf denen Portefeuilles gleichen Risikos liegen, ist typisch (vgl. Tobin [92], S.82). Man beachte, daß daher für jeden festen Geldbetrag $\bar{x}-x_o$ genau ein effizienter Punkt existiert, nämlich der Schnittpunkt der Hyperebene $\{x \mid e^T \cdot x = \bar{x} - x_o\}$ mit dem Strahl effizienter Portefeuilles.

Als Konsequenz für die Berechnung eines optimalen Portefeuilles empfiehlt sich ein Zwei-Stufen-Ansatz:

Stufe 1: Bestimme die optimale Aufteilung $\hat{x}=(\hat{x}_1,..,\hat{x}_n)^T \geq 0$, $e^T \cdot \hat{x} = 1$, einer Geldeinheit auf die risikobehafteten Anlagemöglichkeiten.

Stufe 2: Bestimme die optimale Aufteilung des Geldbetrags $\bar{x}$ auf die risikofreie Anlagemöglichkeit 0 und die Gruppe der risikobehafteten Anlagemöglichkeiten 1,..,n.

Das Problem der zweiten Stufe ist ein einfaches stochastisches Programm mit einer Zufallsvariablen und einer deterministischen Entscheidungsvariablen (vgl. Ziemba et al. [99], S.212).

Uns interessiert vor allem das Problem der Stufe 1, welches sich als pseudokonvexes Programm formulieren läßt.

Sei $x \in S := \{x=(x_1,..,x_n)^T \geq 0 \mid e^T \cdot x = 1\}$ eine beliebige Aufteilung einer GE auf die risikobehafteten Anlagemöglichkeiten. Aus dieser Investition erwächst das Endvermögen $y = \xi^T \cdot x$

mit dem Erwartungswert $E(y) = \Sigma\, x_i \cdot E(\xi_i)$

und der Varianz $V(y) = x^T \cdot C \cdot x$,

wobei C die Varianz-Kovarianz-Matrix der Normalverteilung $F(\xi_1,..,\xi_n)$ ist (vgl. Mood-Graybill [71] , S. 211) . Aus technischen Gründen machen wir noch die ökonomisch unbedenklichen Annahmen, daß die Erwartungswerte $E(\xi_i)$ und die Varianzen $V(\xi_i)$ endlich und positiv sind.

Die Mengen $\{E(y) \mid x \in S\}$ und $\{V(y) \mid x \in S\}$ sind kompakt, da $E(y)$ und $V(y)$ stetige Funktionen von x sind und das Simplex S kompakt ist. Man beachte ferner, daß $V(y)$ über S positiv ist, weil die Varianz-Kovarianz-Matrix gemeinsam normalverteilter Zufallsvariablen positiv definit ist (vgl. Mood-Graybill [71] , S.207). Es ist also gewährleistet, daß die Funktion

$$g(x) = \frac{b^T \cdot x}{\sqrt{x^T \cdot C \cdot x}} \quad , \qquad b^T = (E(\xi_1),..,E(\xi_n)) \ ,$$

über der Menge S ein Maximum annimmt.

Sei nun $g(\hat{x})$ das Maximum von $g(x)$ über S. Man vergewissert sich leicht, daß $\hat{x}$ ein effizientes Portefeuille ist; $\hat{x}$ ist sogar ein optimales Portefeuille, denn nach den oben dargelegten Ergebnissen von Tobin existiert für das Problem der Anlage einer GE in risikobehaftete Anlagemöglichkeiten nur ein effizientes Portefeuille.

Das Problem der Stufe 1 läßt sich also in folgender Weise als Programm mit gebrochener Zielfunktion formulieren:

$$(GZP)^{\dagger}: \quad \text{minimiere} \quad f(x) = \frac{-b^T \cdot x}{\sqrt{x^T \cdot C \cdot x}}$$

$$\text{über} \qquad S := \{ x \geqslant 0 \mid e^T \cdot x = 1 \} .$$

Wir betrachten nun die Funktionen

$h_1(x) := -b^T \cdot x$ und $h_2(x) := \sqrt{x^T \cdot C \cdot x}$

über der Menge $S^+ := \{ x \geqslant -\varepsilon \cdot e \mid \frac{1}{2} \leqslant e^T \cdot x \leqslant \frac{3}{2} \}$

mit $0 < \varepsilon \leqslant \frac{\beta}{2 \cdot \gamma \cdot n \cdot (n-1)}$, $\beta = \min\limits_j b_j$, $\gamma = \max\limits_j b_j$.

(4.2.2.1) Lemma: $h_1(x)$ ist nichtpositiv über S^+.

Beweis: Wegen $e^T \cdot x \geqslant \frac{1}{2}$ existiert ein Index i mit $x_i \geqslant \frac{1}{2n}$. Daraus folgert man:

$$h_1(x) = -b^T \cdot x \leqslant -\frac{b_i}{2n} + \sum_{j \neq i} b_j \cdot \varepsilon \quad \text{für } x \in S^+$$

$$\leqslant -\frac{b_i}{2n} + (n-1) \cdot \varepsilon \cdot \gamma = -\frac{b_i}{2n} + \frac{\beta}{2n} \leqslant 0 .$$

---

† (GZP) stimmt nicht genau mit den Programmen von Lintner [62] und Ziemba et al. [99] überein, da wir hier von der (unrealistischen) Annahme abgesehen haben, daß sich der Anleger zum Zinssatz der risikofreien Anlage auch unbegrenzt verschulden kann.

(4.2.2.2) Lemma: $h_2(x)$ ist konvex über S^+.

Beweis: Sei $0 \leq \lambda \leq 1$ und $\bar{x}, \hat{x} \in S^+$. Dann folgt:

$$h_2(\lambda \cdot \hat{x} + (1-\lambda) \cdot \bar{x}) =$$

$$= \sqrt{(\lambda \cdot \hat{x} + (1-\lambda) \cdot \bar{x})^T \cdot C \cdot (\lambda \cdot \hat{x} + (1-\lambda) \cdot \bar{x})}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \cdot \hat{x}^T \cdot C \cdot \hat{x} + (1-\lambda)^2 \cdot \bar{x}^T \cdot C \cdot \bar{x} + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot (\bar{x}^T \cdot C \cdot \hat{x} + \hat{x}^T \cdot C \cdot \bar{x})} \quad .$$

Bekanntlich (vgl. z.B. Dantzig [15], S. 491) läßt sich C in der Form $C = F^T \cdot F$ schreiben, wobei F wiederum eine $n \times n$-Matrix ist. Ersetzt man nun $\bar{y} = F \cdot \bar{x}$ und $\hat{y} = F \cdot \hat{x}$, so folgt aus der Schwarzschen Ungleichung (vgl. Rudin [79], S. 17):

$$\bar{x}^T \cdot C \cdot \hat{x} + \hat{x}^T \cdot C \cdot \bar{x} = \bar{y}^T \cdot \hat{y} + \hat{y}^T \cdot \bar{y} = 2 \cdot \bar{y}^T \cdot \hat{y}$$

$$\leq 2 \cdot \sqrt{(\bar{y}^T \cdot \bar{y}) \cdot (\hat{y}^T \cdot \hat{y})}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(\bar{x}^T \cdot C \cdot \bar{x}) \cdot (\hat{x}^T \cdot C \cdot \hat{x})} \quad .$$

Daraus erhalten wir nun die Abschätzung

$$h_2(\lambda \cdot \hat{x} + (1-\lambda) \cdot \bar{x}) \leq \lambda \cdot \sqrt{\hat{x}^T \cdot C \cdot \hat{x}} + (1-\lambda) \cdot \sqrt{\bar{x}^T \cdot C \cdot \bar{x}}$$

$$= \lambda \cdot h_2(\hat{x}) + (1-\lambda) \cdot h_2(\bar{x}) \quad ,$$

welche die Konvexität von $h_2(x)$ über S^+ nachweist.

Δ

(4.2.2.3) Satz: Die Zielfunktion $f(x)$ des Problems (GZP) ist pseudokonvex über S .

Beweis: Man erkennt zunächst, daß $h_1(x)$ und $h_2(x)$ über S^+ differenzierbar sind:

$$\frac{\partial h_1(x)}{\partial x} = -b \ , \qquad \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} = \frac{C \cdot x}{\sqrt{x^T \cdot C \cdot x}} \ .$$

Mangasarian [65] hat nun gezeigt, daß eine Funktion $\frac{r(x)}{s(x)}$ über einer offenen Menge S^o pseudokonvex ist, wenn gilt:

1. $r(x)$ ist linear und nichtpositiv über S^o,
2. $s(x)$ ist konvex und ungleich Null über S^o,
3. $r(x)$ und $s(x)$ sind differenzierbar über S^o.

Mit den Lemmata (4.2.2.1) und (4.2.2.2) folgt die Pseudokonvexität von $f(x)$ über S^+; die Pseudokonvexität von $f(x)$ über $S \subset S^+$ ist eine direkte Konsequenz der Definition (4.2.1) .

Das Ergebnis (4.2.2.3) ist insofern bedeutungsvoll, als es die ökonomische Relevanz einer abgeschwächten Konvexitätsforderung nachweist. Die Funktion $f(x)$ ist nämlich im allgemeinen über S nicht konvex (vgl. Ziemba et al. [99], S. 213) .

Schreiben wir S in der Form:

$$S = \{ x \mid -I \cdot x \leq 0 \ , \ e^T \cdot x - 1 \leq 0 \ , \ -e^T \cdot x + 1 \leq 0 \} \ ,$$

so erhalten wir die Kuhn-Tucker-Bedingungen (vgl. Mangasarian [64], S. 94):

$$(KT):\quad (KT1)\quad \nabla f(x) + u^T \cdot \begin{pmatrix} -I \\ e^T \\ -e^T \end{pmatrix} = 0\ ,$$

$$(KT2)\quad e^T \cdot x = 1\ ,$$

$$(KT3)\quad u\ ,\ x \geq 0\ ,$$

$$(KT4)\quad u^T \cdot \begin{pmatrix} -x \\ e^T \cdot x - 1 \\ -e^T \cdot x + 1 \end{pmatrix} = 0\ ;$$

hierbei ist †

$$\nabla f(x) = \frac{-b^T \cdot (x^T \cdot C \cdot x)^{\frac{1}{2}} + (b^T \cdot x) \cdot (x^T \cdot C \cdot x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^T \cdot C)}{x^T \cdot C \cdot x}$$

$$= (x^T \cdot C \cdot x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-b^T + \frac{(b^T \cdot x) \cdot (x^T \cdot C)}{x^T \cdot C \cdot x} \right) . \qquad (I)$$

(4.2.2.4) Satz: Ist $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Komplementärproblems LK(C,-b), dann erfüllt

$$\hat{x} = \frac{\hat{z}}{e^T \cdot \hat{z}}\ , \qquad \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{w} \cdot (\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z})^{-\frac{1}{2}} \cdot (e^T \cdot \hat{z}) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Kuhn-Tucker-Bedingungen (KT).

Beweis: Sei $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ eine komplementäre Lösung von LK(C,-b). Weil -b negative Komponenten hat, gilt $\hat{z} \neq 0$. $\hat{x}$ und $\hat{u}$ sind also definiert und erfüllen offensichtlich (KT2) und (KT3).

Aus $\hat{z}^T \cdot \hat{w} = \hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z} - b^T \cdot \hat{z} = 0$ folgert man:

$$\frac{b^T \cdot \hat{z}}{\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z}} = 1\ . \qquad (II)$$

---

† Bei der Ableitung von $x^T \cdot C \cdot x$ beachte man, daß die Varianz-Kovarianz-Matrix C symmetrisch ist.

Für $\nabla f(\hat{x})$, den Gradienten von $f(x)$ an der Stelle $\hat{x}$, erhält man durch Einsetzen in (I) :

$$\nabla f(\hat{x}) = (e^T \cdot \hat{z}) \cdot (\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-b^T + \frac{(b^T \cdot \hat{z}) \cdot (\hat{z}^T \cdot C)}{\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z}} \right)$$

$$\xrightarrow[(II)]{} \nabla f(\hat{x}) = \hat{w}^T \cdot (e^T \cdot \hat{z}) \cdot (\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z})^{-\frac{1}{2}} ;$$

daraus ersieht man leicht, daß $\hat{x}$ und $\hat{u}$ auch (KT1) erfüllen.

Aus der Beziehung

$$\hat{u}^T \cdot \begin{pmatrix} -\hat{x} \\ e^T \cdot \hat{x} - 1 \\ -e^T \cdot \hat{x} + 1 \end{pmatrix} = -\hat{w}^T \cdot \hat{z} \cdot (\hat{z}^T \cdot C \cdot \hat{z})^{-\frac{1}{2}}$$

folgt, daß $\hat{x}$ und $\hat{u}$ auch der Bedingung (KT4) genügen.

Δ

Weil die Matrix C positiv definit ist, läßt sich mit Lemkes Algorithmus eine komplementäre Lösung $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ des Problems LK(C,-b) bestimmen (siehe Abschnitt 3.2), und die im Satz (4.2.2.4) angegebenen Beziehungen liefern einen Kuhn-Tucker-Punkt $(\hat{x},\hat{u})$. Für pseudokonvexe Programme sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen jedoch bekanntlich hinreichend für ein globales Optimum (siehe Mangasarian [64] , S. 153); $\hat{x} = \frac{\hat{z}}{e^T \cdot \hat{z}}$ löst also das Problem (GZP) .

4.3 Gleichgewichtspunkte nichtkooperativer Spiele

4.3.1 Bimatrixspiele

Spätestens mit der grundlegenden Arbeit von Shubik [89] hat es sich als nützlich erwiesen, ökonomische Konkurrenzsituationen mit Hilfe der Theorie der strategischen Spiele zu analysieren. Eine Duopolsituation, in der dem ersten Konkurrenten ("Zeilenspieler") m Entscheidungsalternativen ("reine Strategien") zur Verfügung stehen und dem zweiten ("Spaltenspieler") n solcher Alternativen, läßt sich zum Beispiel als Bimatrixspiel beschreiben.

Ein Bimatrixspiel $\Gamma(A,B)$ ist durch ein Paar von $m \times n$-Matrizen $A = (A_{ij})$ und $B = (B_{ij})$ gegeben; A_{ij} gibt dabei den Verlust des Zeilenspielers und B_{ij} den Verlust des Spaltenspielers an, wenn ersterer seine i-te und letzterer seine j-te reine Strategie einsetzt (Gewinne sind negative Verluste).
Wiederholt sich diese Konkurrenzsituation über mehrere Perioden (unter unveränderten Bedingungen), so ist es sinnvoll, auch "gemischte Strategien"

$$p = (p_1, \cdots, p_m)^T \geq 0 \ , \qquad p^T \cdot e_m = 1 \ ,$$
$$q = (q_1, \cdots, q_n)^T \geq 0 \ , \qquad q^T \cdot e_n = 1$$

zu betrachten; p_i bzw. q_j geben dann die relativen Häufigkeiten an, mit denen die reinen Strategien i bzw j eingesetzt werden. Bei Verwendung der gemischten Strategien p und q betragen die zu erwartenden Verluste :

$\alpha = p^T \cdot A \cdot q$ für den Zeilenspieler und

$\beta = p^T \cdot B \cdot q$ für seinen Konkurrenten.

Welche Strategien werden die Spieler nun verfolgen, wenn sie die Minimierung ihrer Verluste anstreben und eine Kooperation nicht möglich ist? Wäre die Strategie des jeweiligen Konkurrenten bekannt, so ergäben sich die optimalen Gegenstrategien einfach aus den Lösungen der Aufgaben: $\underset{p}{\text{minimiere}}\ \alpha = p^T \cdot A \cdot q$ und $\underset{q}{\text{minimiere}}\ \beta = p^T \cdot B \cdot q$.

Da dies jedoch nicht der Fall ist, werden sich die Spieler wahrscheinlich für ein Paar von "Gleichgewichtsstrategien" entscheiden. Diese Strategienpaare sind folgendermaßen gekennzeichnet: spielt einer der beiden Spieler eine Gleichgewichtsstrategie, so ist es für den Gegenspieler am günstigsten, ebenfalls seine Gleichgewichtsstrategie einzusetzen. Formal drückt man dies für gewöhnlich so aus:

(4.3.1.1) Definition: Ein Paar gemischter Strategien $(\hat{p},\hat{q})$ heißt ein Paar von Gleichgewichtsstrategien des Spiels $\Gamma(A,B)$, wenn gilt:

$\hat{\alpha} = \hat{p}^T \cdot A \cdot \hat{q} \leq p^T \cdot A \cdot \hat{q}$ für alle gem. Strategien p des Zeilenspielers,

$\hat{\beta} = \hat{p}^T \cdot B \cdot \hat{q} \leq \hat{p}^T \cdot B \cdot q$ für alle gem. Strategien q des Spaltenspielers.

Die Existenz mindestens eines Paares von Gleichgewichtsstrategien zeigte Nash [75] mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Die effiziente Bestimmung eines solchen Paares von Gleichgewichtsstrategien war jedoch allgemein

nicht möglich, bevor Lemke und Howson [60] ihre bahnbrechende Arbeit veröffentlichten. Tatsächlich entwickelten sie ihren Algorithmus genau für dies Problem der Bestimmung von Gleichgewichtsstrategien in Bimatrixspielen. Es läßt sich zeigen (siehe Cottle-Dantzig [10], S. 107 f), daß die Paare von Gleichgewichtsstrategien eines Bimatrixspiels $\Gamma(\bar{A},\bar{B})$ in eineindeutiger Beziehung zu den komplementären Lösungen eines linearen Komplementärproblems LK(M,q) stehen: hierbei sei $k = m+n$, $q = -e_k$, $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$, $A = (A_{ij}) = (\bar{A}_{ij}+\lambda) > O$, $B = (B_{ij}) = (\bar{B}_{ij}+\mu) > O$ und λ, μ seien geeignete Skalare.

Die Matrix $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$ fällt nicht in eine der Klassen von Matrizen aus Abschnitt 3.2, für welche die Anwendung des Lemke-Algorithmus' auf LK(M,q) notwendig zu einer komplementären Lösung führt. Lemke und Howson [60] erkannten jedoch, daß das Polyeder

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \geq O \mid w = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix} \cdot z - e_k \right\}$$

genau k unbeschränkte fastkomplementäre Facetten besitzt, und daß für jeden Index $j \in \{1,\cdot\cdot,k\}$ nur die Punkte einer dieser Facetten die Bedingung $w^T \cdot z = w_j \cdot z_j$ erfüllen. Wegen Lemma (2.2.8) führt also jeder fastkomplementäre Pfad der Klasse $j \in \{1,\cdot\cdot,k\}$, der in der einzigen unbeschränkten F-Facette dieser Klasse initiiert wird, zu einer komplementären Lösung. Den Ausgangspunkt t^1 eines solchen Pfades erhält man auf folgende Weise:

Schritt 0: Man betrachte das Ausgangstableau

$w_1 \cdots w_k$	$z_1 \cdots z_k$	
I_m	$0 \quad -A$	$-e_m$
I_n	$-B^T \quad 0$	$-e_n$

System 1
System 2

und wähle einen Index $j \in \{1,2,..,k\}$.

Schritt 1: Man pivotiere in Spalte z_j derart, daß eines der Systeme zulässig wird;

Kommentar: eine Variable w_i, $i \neq j$, verläßt die Basis.

Man pivotiere in Spalte z_i derart, daß das Gesamttableau zulässig wird;

Kommentar: eine Variable w_h verläßt die Basis.

Man überzeugt sich leicht davon, daß Schritt 1 tatsächlich durchführbar ist, und daß die erhaltene zulässige Basislösung t^1 der Ursprung einer unbeschränkten F-Facette der Klasse j ist. Gilt $h = j$, so ist t^1 bereits eine komplementäre Lösung; andernfalls ist t^1 fastkomplementär der Klasse j; man initiiert einen F-Pfad in t^1, indem man in Spalte z_h pivotiert und weiter nach der Pivotregel (2.3.1) verfährt.

(4.3.1.2) Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Man erhält das Ausgangstableau:

w_1	$\cdots$	w_4	z_1	$\cdots\cdots$	z_4	
1				-5	-2	-1
	1			-1	-4	-1
		1	-1	-5		-1
		1	-9	-3		-1

Entscheidet man sich nun (willkürlich) für einen F-Pfad der Klasse $j = 1$, so hat ein Pivotschritt in der Spalte z_1 zu erfolgen:

w_1 ····· w_4	z_1	z_4	
1		-5 -2	-1
1		-1 -4	-1
-1	1 5		1
-9 1	0 42		8

w_3 hat die Basis verlassen; man pivotiert daher in der Spalte z_3 und erhält:

1 -5		0 18	4
-1		1 4	1
-1	1 5		1
-9 1	0 42		8

$\bar{w}^T = (4,0,0,8)$; $\bar{z}^T = (1,0,1,0)$ ist offensichtlich eine fastkomplementäre Basislösung und zudem Ursprung einer F-Facette der Klasse 1 : w_2 kann beliebig erhöht werden, ohne daß die Zulässigkeit oder die Bedingung $w^T.z = w_1.z_1$ verletzt würde.

Durch Erhöhung von z_2 verläßt man t^1 auf einem fastkomplementären Pfad:

1 -5		0 18	4
-1		1 4	1
1/14 -5/42	1 0		1/21
-3/14 1/42	0 1		4/21

w_4 hat die Basis verlassen; der nächste Pivotschritt auf der zu w_4 komplementären Variablen z_4 liefert das Endtableau:

1/18	-5/18					0	1	2/9
-2/9	1/9					1	0	1/9
		1/14	-5/42	1	0			1/21
		-3/14	1/42	0	1			4/21

und somit die komplementäre Lösung:

$\hat{w} = 0$, $\hat{z}^T = (1/21, 4/21, 1/9, 2/9)$.

Dieser Lösung entspricht das folgende Paar von Gleichgewichtsstrategien (vgl. Cottle-Dantzig [10], S. 107) :

$\hat{p}^T = (1/5, 4/5)$, $\hat{q}^T = (1/3, 2/3)$.

4.3.2 Polymatrixspiele

Polymatrixspiele sind Verallgemeinerungen von Bimatrixspielen auf Situationen mit $N \geq 2$ Spielern. Man geht ebenfalls davon aus, daß jedem Spieler i eine endliche Menge $S_i = \{s_1^i, \cdots, s_{N_i}^i\}$ von reinen Strategien zur Verfügung steht. Das entscheidende Kennzeichen der Polymatrixspiele sind separable Verlustfunktionen, die für Spieler i die folgende Gestalt haben:

$$V_i(s_{\nu_1}^1, \cdots, s_{\nu_N}^N) = \sum_{j \neq i} a^{ij}(s_{\nu_i}^i, s_{\nu_j}^j) \qquad (\nu_i \in \{1, \cdots, N_i\}) .$$

Man setzt also voraus, daß das Scherflein, das ein Spieler j zum Verlust des Spielers i beiträgt, nicht von der Strategienwahl der übrigen Spieler abhängt. Die Summe der "partiellen Verluste" $a^{ij}(s^i_{\nu_i}, s^j_{\nu_j})$ ergibt dann den Gesamtverlust des Spielers i.

Sei A^{ij} die "partielle Verlustmatrix" für Spieler i gegenüber Spieler j. Berücksichtigt man auch gemischte Strategien

$$x^i \geq 0\,, \quad e^T \cdot x^i = 1 \qquad (i=1,..,N)\,,$$

so hat Spieler i den Verlust

$$V_i(x^1,..,x^N) = \sum_{j \neq i} (x^i)^T \cdot A^{ij} \cdot x^j$$

zu erwarten.

Entsprechend wie im Abschnitt 4.2.1 definiert man:

(4.3.2.1) Definition: Ein Gleichgewichtspunkt eines Polymatrixspiels Γ ist ein N-Tupel $\hat{x} = (\hat{x}^1,..,\hat{x}^N)$ gemischter Strategien der N Spieler mit der Eigenschaft:

$$V_i(\hat{x}^1,..,\hat{x}^N) \leq V_i(\hat{x}^1,..,x^i,..,\hat{x}^N)$$

für alle gemischten Strategien x^i und alle $i = 1,..,N$.

Das Problem der Bestimmung eines Gleichgewichtspunktes wurde von Howson [48] als lineares Komplementärproblem formuliert und mit Hilfe eines speziellen Komplementärpivot-Algorithmus' gelöst. Wir gehen auf diesen Algorithmus hier nicht näher ein, weil Eaves [26] wenig später für

ein allgemeineres Spiel zeigte, daß sich ein Gleichgewichtspunkt mit dem Algorithmus von Lemke bestimmen läßt. Eaves betrachtete Polymatrixspiele Γ_E, deren Verlustfunktionen die allgemeinere Gestalt

$$V_i(x^1,\cdot\cdot,x^N) = (x^i)^T \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \cdot A^{ij} \cdot x^j + c^i \right)$$

haben; hierbei werden die $(N_i \times N_i)$-Matrizen A^{ii} positiv semidefinit vorausgesetzt; δ_{ii} ist gleich $\frac{1}{2}$ und δ_{ij} gleich 1 für $i \neq j$.

Die entscheidende Verallgemeinerung ist jedoch die, daß zwischen den gemischten Strategien der Spieler lineare Beziehungen zugelassen werden. Dazu werden die Restriktionen

$$x^i \geq 0 \ , \quad e^T \cdot x^i = 1 \qquad (i=1,\cdot\cdot,N)$$

durch die folgende Bedingung ersetzt:

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{Bmatrix} \in S := \left\{ y \in R^{\Sigma N_i} \;\middle|\; y \geq 0 \ , \quad D \cdot y = \sum_{i=1}^{N} D^i \cdot y^i \leq d \right\} .$$

D^i ist dabei eine $(m \times N_i)$-Matrix $(i=1,\cdot\cdot,N)$ und d ein m-Vektor.

Sei nun

$$c := \begin{Bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^N \end{Bmatrix} , \qquad A := \begin{Bmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots\cdots & A^{1N} \\ A^{21} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & A^{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A^{N1} & \cdots\cdots\cdots & & A^{NN} \end{Bmatrix} ,$$

$$M := \begin{Bmatrix} A & D^T \\ -D & 0 \end{Bmatrix} , \qquad q := \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} .$$

Eaves [26] zeigte, daß sich das Problem der Bestimmung eines Gleichgewichtspunktes eines Polymatrixspiels Γ_E

in der Form LK(M,q) darstellen läßt, und folgerte:

(4.3.2.2) Satz: Ist die Menge S beschränkt und nicht leer, dann läßt sich mit Hilfe des Algorithmus' von Lemke ein Gleichgewichtspunkt des Polymatrixspiels Γ_E bestimmen.

Beweis: Ist S beschränkt, dann ist $\{z^2 \geq 0 \mid D^T.z^2 \geq c'\}$ für beliebiges c' nicht leer (Dualitätssatz). Dies bedeutet offensichtlich die Zulässigkeit von LK(M,q), und mit Satz (3.2.1) folgt die Behauptung.

4.3.3 Endliche 2-Personen-Spiele mit unvollständiger Information

Harsanyi [46] entwickelte eine Theorie für die Analyse von Spielen mit unvollständiger Information, mittels derer sich viele ökonomische Situationen treffender behandeln lassen als mit den oben erwähnten Polymatrixspielen.

Man überdenke zum Beispiel die Situation zweier Duopolisten, die für eine Periode über die Aufteilung ihrer Mittel auf die Bereiche Produktion und Absatzförderung zu entscheiden haben. Bei der Formulierung als Bimatrixspiel muß vorausgesetzt werden, daß der Effekt von Werbe-

maßnahmen auf die Nachfrage quantitativ bekannt ist. Realistischer wäre jedoch die Annahme, daß der genaue Einfluß von Werbemaßnahmen nicht bekannt ist, die Konkurrenten aber doch gewisse Teilinformationen besitzen, die ihnen z.B. ihre Marktforschungsabteilungen geliefert haben.

Dieses Beispiel fällt in eine Teilklasse der von Harsanyi [46] betrachteten Probleme, für die Howson und Rosenthal [49] unlängst zeigten, daß sich ein "Bayes-Gleichgewicht" mit einem Komplementärpivot-Algorithmus bestimmen läßt. Die Autoren betrachten 2-Personen-Spiele, in denen den Spielern M bzw. N reine Strategien zur Verfügung stehen. Die Umwelt befindet sich in einem von H Zuständen $Z_1, \cdots, Z_H$, der den Spielern nicht bekannt ist. Für jeden möglichen Zustand Z_h kennt man jedoch die damit verbundenen Verluste, die in den M×N-Matrizen A^h und B^h zusammengefaßt sind. Ihre Informationen über den Zustand der Umwelt erhalten die Spieler durch Beobachten einer Realisation der diskreten zufälligen Varablen r und s : der Zeilenspieler beobachtet einen Wert $\bar{r} \in \{1,\cdot\cdot,R\}$, der Spaltenspieler einen Wert $\bar{s} \in \{1,\cdot\cdot,S\}$. Keiner der Spieler kennt die Beobachtung des Konkurrenten, beide kennen aber die a priori Wahrscheinlichkeiten $P(h,\bar{r},\bar{s})$ dafür, daß der Umweltzustand Z_h herrscht und $\bar{r}$ bzw. $\bar{s}$ beobachtet werden. Der Zeilenspieler entscheidet sich aufgrund von $\bar{r}$ und der Verteilung P für eine Strategie, der Spaltenspieler aufgrund von $\bar{s}$ und der Verteilung P .

(4.3.3.1) Definition: Ein Bayes-Gleichgewicht (vgl. Harsanyi [46]) ist ein Paar $(\hat{p},\hat{q})$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\hat{p}$ ist ein R-Tupel nichtnegativer M-Vektoren $\hat{p}^1,\cdot\cdot,\hat{p}^R$ mit $e^T\cdot\hat{p}^i = 1$ für alle i .

b) $\hat{q}$ ist ein S-Tupel nichtnegativer N-Vektoren $\hat{q}^1,\cdot\cdot,q^S$ mit $e^T\cdot\hat{q}^j = 1$ für alle j .

c) $\sum_h \sum_{\bar{s}} P(h,\bar{r},\bar{s})\cdot(\hat{p}^{\bar{r}})^T\cdot A^h\cdot\hat{q}^{\bar{s}} \leq \sum_h \sum_{\bar{s}} P(h,\bar{r},\bar{s})\cdot(p^{\bar{r}})^T\cdot A^h\cdot\hat{q}^{\bar{s}}$
für alle gemischten Strategien $p^{\bar{r}}$ und alle $\bar{r} = 1,\cdot\cdot,R$.

d) $\sum_h \sum_{\bar{r}} P(h,\bar{r},\bar{s})\cdot(\hat{p}^{\bar{r}})^T\cdot B^h\cdot\hat{q}^{\bar{s}} \leq \sum_h \sum_{\bar{r}} P(h,\bar{r},\bar{s})\cdot(\hat{p}^{\bar{r}})^T\cdot B^h\cdot q^{\bar{s}}$
für alle gemischten Strategien $q^{\bar{s}}$ und alle $\bar{s} = 1,\cdot\cdot,S$.

$(\hat{p},\hat{q})$ gibt für jede mögliche Beobachtung eines Spielers eine gemischte Strategie an, von der abzuweichen für keinen Spieler von Vorteil ist, solange nur der Gegenspieler seine Bayes-Gleichgewichts-Strategie einsetzt.

Setzt man nun

$$A^{ij} := \begin{cases} \sum_h P(h,i,j-R)\cdot A^h & \text{für } 1\leq i\leq R,\ R+1\leq j\leq R+S \\ \sum_h P(h,j,i-R)\cdot (B^h)^T & \text{für } 1\leq j\leq R,\ R+1\leq i\leq R+S \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erkennt man aus einem Vergleich der Definitionen (4.3.2.1) und (4.3.3.1) die Gültigkeit von:

(4.3.3.2) Satz (Howson-Rosenthal [49]) :
Das Paar $(\hat{p},\hat{q})$ ist genau dann ein Bayes-Gleichgewicht des oben erläuterten 2-Personen-Spiels mit unvollständiger Information, wenn $(\hat{p},\hat{q})$ ein Gleichgewichtspunkt des (R+S)-Personen-Polymatrixspiels ist, das durch die Matrizen A^{ij} gegeben wird.

Bayes-Gleichgewichte nichtkooperativer 2-Personen-Spiele mit unvollständiger Information lassen sich daher mit dem Komplementärpivot-Algorithmus von Howson [48] oder mit Lemkes Algorithmus bestimmen (vgl. Abschnitt 4.3.2) .

4.4 Ein Modell der Aufteilung bedingter Nachfrage auf einem oligopolistischen Markt

Die Entwicklung von Komplementärpivot-Algorithmen hat einerseits die Lösung bislang nicht effizient lösbarer Optimierungsaufgaben ermöglicht; andererseits führt sie vielfach auch zu einer vereinfachten Lösung einiger Probleme aus der Wirtschaftstheorie, für die bereits andere - teils sehr komplizierte - Lösungsverfahren existieren, und damit zu einer vereinheitlichenden Schau mit Hinblick auf Lösbarkeitsfragen. An dieser Stelle soll als Beispiel ein spezielles Problem aus der Oligopoltheorie behandelt werden.

Man betrachte eine Oligopolsituation, in der die Preise der Güter als Entscheidungsparameter auftreten: die Anbieter nennen Preise, und der Markt reagiert mit einer entsprechenden Nachfrage. Die Güter verschiedener Anbieter seien substituierbar, aber für die Käufer unterscheidbar und nicht gleichwertig. Sind nun die angebotenen Mengen einzelner Produkte begrenzt, so kann sich das Problem einer geeigneten "Umverteilung" der Nachfrage nach knappen Gütern auf andere Produkte ergeben. Die Zuordnung dieser "potentiellen Nachfrage" (contingent demand) auf die anderen Anbieter gehört zu den schwierigsten Problemen der Oligopoltheorie (vgl. Shubik [89], S. 82).

Wir wenden uns hier einem Modell der Nachfrage-Umverteilung zu, das von Levitan [61] vorgeschlagen wurde: werden Güter knapp, so tritt ein Preismechanismus inkraft (z.B. Arbitragehändler), der die Preise dieser Güter anhebt, bis ein Marktausgleich eintritt; simultan werden die Preise jener Güter angepaßt, die erst durch die Umverteilung knapp werden.

Für den Fall linearer Nachfragefunktionen erfordert das Modell von Levitan die Lösung der folgenden Aufgabenstellung zur Bestimmung des neuen Preisvektors (siehe Levitan [61], S. 119):

LEV: gegeben seien Vektoren $b \geq a$ und eine quadratische Leontief-Matrix A †. Man bestimme einen Vektor $x \in R^n$ mit der Eigenschaft:

1) $a \leq -A \cdot x = y \leq b$,
2) aus $x_i > 0$ folgt $y_i = b_i$ und
3) aus $x_i < 0$ folgt $y_i = a_i$.

Zur Lösung des Problems LEV entwickelte Levitan (siehe [61], S. 119 ff) einen speziellen (vergleichsweise komplizierten) Algorithmus, der sich wesentlich auf die Eigenschaften von A als Leontief-Matrix stützt.
Ein besonderer Algorithmus erweist sich jedoch als überflüssig, denn die Lösungen von LEV sind den Lösungen eines linearen Komplementärproblems LK äquivalent, das sich mit Lemkes Algorithmus lösen läßt. Man betrachte die folgende Darstellung von LK:

LK : man bestimme nichtnegative Vektoren x^1, x^2, u, v des R^n mit der Eigenschaft:

a) $-A \cdot x^1 + A \cdot x^2 + u = b$
b) $A \cdot x^1 - A \cdot x^2 + v = -a$
c) $u^T \cdot x^1 = 0$, $v^T \cdot x^2 = 0$.

---

† Eine m×n-Matrix B heißt eine Leontief-Matrix, wenn jede Spalte von B genau ein positives Element besitzt und ein nichtnegativer Vektor x existiert, so daß $B \cdot x > 0$ gilt.

(4.4.1) Satz: Ist (x^1,x^2,u,v) eine Lösung von LK, so löst $x = x^1 - x^2$ LEV. Ist andererseits x eine Lösung von LEV, so existieren Vektoren x^1, x^2, u, v mit $x^1 - x^2 = x$, die LK lösen.

Beweis: Ist (x^1,x^2,u,v) eine Lösung von LK, so erfüllt $x = x^1 - x^2$ offensichtlich 1). Aus $x_i > 0$ folgt $x_i^1 > x_i^2 \geq 0$ und mit c) $u_i = 0$; es gilt also $y_i = b_i$ und damit 2). 3) folgt analog.

Sei nun x eine Lösung von LEV. Gilt $x_i \geq 0$, so setze man $x_i^1 = x_i$, $x_i^2 = 0$; andernfalls setze man $x_i^2 = -x_i$, $x_i^1 = 0$. Offenbar gilt $x = x^1 - x^2$ und $x^1, x^2 \geq 0$. Mit 1) folgt $u = b - y \geq 0$, $v = y - a \geq 0$. Aus 2) und 3) ergibt sich nun sofort c).

Bekanntlich existiert zu einer quadratischen Leontief-Matrix A die Inverse A^{-1}, und es gilt $A^{-1} > 0$; ferner hat A^{-1} positive Hauptminoren (vgl. z.B. Dorfman et al. [2o], S. 256). Aus der Äquivalenz des Gleichungssystems a), b) mit dem System:

a') $u + v = b - a$

b') $-x^1 + x^2 + A^{-1}.u = A^{-1}.b$

folgt die Formulierung von LK als lineares Komplementärproblem LK(M,q) mit $w = \begin{pmatrix} x^1 \\ v \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} u \\ x^2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} A^{-1} & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -A^{-1}.b \\ b-a \end{pmatrix}$.

Man beachte, daß die Matrix M nicht notwendig kopositiv-plus ist (es sei denn, man setzt auch noch die Symmetrie von A^{-1} voraus); auch liegt M nicht in der Klasse SSM (vgl. die Definition auf S.36).
Offensichtlich sind jedoch die Voraussetzungen des Korollars (3.2.2) erfüllt: $\{x \geq 0 \mid x \leq b-a\}$ ist beschränkt, LK(M,q) ist zulässig und $b-a$ ist nichtnegativ.
Es existiert also eine komplementäre Lösung von LK(M,q), die mit dem Algorithmus von Lemke - wie im Beweis zu Satz (3.2.1) erläutert - bestimmt werden kann.

Bedeutungsvoll ist, daß für die Umformulierung des ursprünglichen Problems LEV in die Form LK(M,q) allein die Voraussetzung der Existenz von A^{-1} benutzt wurde, so daß also - anders als bei dem von Levitan vorgeschlagenen Verfahren - A nicht notwendig eine Leontief-Matrix sein muß. Was bedeutet nun die Abschwächung dieser Voraussetzung ökonomisch? Im dargestellten Modell steht $-A_{ij}$ für die marginale Veränderung der Nachfrage nach Gut i bei einer marginalen Erhöhung des Preises von Gut j (vgl. Levitan [61] , S. 57). Die Annahmen

$$\text{(i)} \quad -A_{ij} \geq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \,,$$
$$\text{(ii)} \quad -A_{ii} < 0 \quad \text{für alle } i$$

beschreiben also die Substituierbarkeit aller Güter untereinander sowie die Tatsache, daß keins der Güter inferior ist: steigt der Preis von Gut j, so fällt -ceteris paribus - die Nachfrage nach Gut j, während -ceteris paribus -

die Nachfrage nach anderen Gütern nicht fällt.
Eine Leontief-Matrix hat aber zusätzlich die Eigenschaft der "überwiegenden Diagonale" : es existiert ein Vektor x, so daß $A \cdot x > 0$ gilt. Diese mehr "technische" Annahme ist bei der Anwendung des Algorithmus von Lemke nicht erforderlich.

4.5 Ein Gleichgewichtsmodell für eine Volkswirtschaft mit garantierten Mindestpreisen

4.5.1 Das Grundmodell

Das folgende Modell wird häufig dazu benutzt, in der Theorie der linearen Optimierung die ökonomische Bedeutung der Dualvariablen als "Schattenpreise" oder "Grenzproduktivitäten" zu verdeutlichen:

Wir betrachten eine Volkswirtschaft mit n Produktionsprozessen, in denen m (limitationale) Produktionsfaktoren verarbeitet werden. Die Produktionsfunktionen seien linear und durch die $m \times n$-Matrix $A \geq 0$ gegeben; das Matrixelement A_{ij} gebe dabei die Menge des Faktors i an, die benötigt wird, um den j-ten Prozeß mit der Einheitsintensität zu betreiben.
Ferner nehme man an, daß der output unserer (kleinen) Volkswirtschaft in beliebiger Höhe auf dem Weltmarkt

abgesetzt werden kann; dort erziele der output des j-ten Prozesses - betrieben mit der Einheitsintensität - den festen Preis p_j. Ferner seien die Ressourcen an Produktionsfaktoren durch den Vektor $b = (b_1,\cdot\cdot,b_m)^T \geq 0$ beschränkt. Schließlich bezeichne x_j das Intensitätsniveau des j-ten Prozesses und y_i den Preis einer Einheit des Faktors i auf dem Inlandsmarkt der betrachteten Volkswirtschaft.
Es läßt sich zeigen (siehe Hansen-Manne [43], S. 3f), daß ein nichtnegativer Vektor $\hat{z} = \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}$ genau dann ein Marktgleichgewicht dieser Volkswirtschaft ist, wenn er das lineare Komplementärproblem LK(M,q) mit $q = \begin{pmatrix}-p\\ b\end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix}0 & A^T\\ -A & 0\end{pmatrix}$ löst.

Wir treffen zunächst folgende

(4.5.1.1) Annahme: Jeder Produktionsprozeß erfordert mindestens einen Inputfaktor, d.h. jede Spalte $A_{\cdot j}$ von A hat mindestens eine positive Komponente.

Damit folgt:

(4.5.1.2) Satz: Unter der Annahme (4.5.1.1) existiert ein Marktgleichgewicht der betrachteten Volkswirtschaft; es kann mit Lemkes Algorithmus bestimmt werden.

Beweis: Bekanntlich (vgl. Cottle-Dantzig [10], S. 104) ist obiges lineares Komplementärproblem äquivalent dem Paar dualer linearer Programme:

LP: maximiere $p^T \cdot x$

über $\{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\}$,

DP: minimiere $b^T \cdot y$

über $\{y \geq 0 \mid A^T \cdot y \geq p\}$.

Unter der Annahme (4.5.1.1) haben beide Programme zulässige Lösungen; aus der Dualität folgt die Existenz optimaler Lösungen. Da $M = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit ist, bestimmt Lemkes Algorithmus eine optimale Lösung von LK(M,q) (vgl. Abschnitt 3.2).

Dieses einfache Modell geht von einer Situation vollständiger Konkurrenz aus, in der der Preis jedes Faktors seine Grenzproduktivität widerspiegelt.

Realitätsnäher wäre es, wenn für einige Faktoren auch die Möglichkeit des Auseinanderklaffens von Schatten- und Marktpreisen berücksichtigt werden könnte; man denke etwa an staatlich regulierte Preise auf Teilmärkten (Mindestpreise auf dem EG-Agrarmarkt). Hansen und Manne [43] haben ein Modell mit zusätzlichen Nebenbedingungen dieser Art entwickelt: für jeden Produktionsfaktor kann entweder eine obere oder aber eine untere Preisschranke berücksichtigt werden. Das Problem der Bestimmung eines Gleichge-

wichts des derart erweiterten Modells haben dieselben Autoren als lineares Komplementärproblem formuliert. Keine Aussagen wurden hingegen darüber gemacht, unter welchen Bedingungen dieses Modell eine Gleichgewichtslösung besitzt und wie diese gegebenenfalls bestimmt werden kann.

Im folgenden Abschnitt erörtern wir eine Modifikation des Modells von Hansen und Manne: dabei beschränken wir uns auf die Einführung unterer Preisschranken. Von der Annahme konstanter Weltmarktpreise gehen wir ab und beziehen auf diese Weise auch solche Volkswirtschaften in die Betrachtung ein, die aufgrund ihrer großen Produktionsmengen die Weltmarktpreise beeinflussen können.
Unter schwachen zusätzlichen Annahmen wird gezeigt, daß eine ungerade Anzahl von Gleichgewichtslösungen existiert. Ferner wird ein Komplementärpivot-Algorithmus angegeben, der mindestens eine Gleichgewichtslösung bestimmt.

Im Abschnitt 4.5.3 wird schließlich das Modell von Hansen und Manne derart verallgemeinert, daß untere und obere Preisschranken gleichzeitig zugelassen sind. Für diese Situation wird eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Gleichgewichtslösung angegeben.

4.5.2 Das Modell mit garantierten Mindestpreisen und linearen Preis-Absatz-Funktionen

Hansen und Manne ([43], S. 6ff) unterteilen die Volkswirtschaft in zwei Sektoren, deren Akteure sich an unterschiedlichen Faktorpreisen orientieren: der "öffentliche Sektor" orientiert sich am Vektor y der Grenzproduktivitäten (Schattenpreise), während sich der "private Sektor" mit den Marktpreisen y^M konfrontiert sieht. Dabei wird angenommen, daß der Marktpreis y_i^M solange der Grenzproduktivität y_i gleicht, wie y_i oberhalb des festgesetzten Mindestpreises d_i liegt. Fällt y_i unter d_i, dann ist y_i^M gleich d_i:

$$y_i^M = \begin{cases} y_i & \text{falls } y_i \geq d_i \\ d_i & \text{sonst .} \end{cases}$$

Wir lassen die Möglichkeit offen, daß die betrachtete Volkswirtschaft durch die Höhe ihres outputs die Weltmarktpreise beeinflußt, indem wir den festen Preisvektor p durch die lineare Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = c - B \cdot x$$

ersetzen. Dabei wird natürlich davon ausgegangen, daß für alle realisierbaren Intensitäten die Weltmarktpreise nichtnegativ sind:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b\} .$$

Weitere Annahmen über die $n \times n$-Matrix B werden nicht gemacht (in der Regel werden die Diagonalelemente B_{ii} positiv sein).

Mögen nun die ersten n_1 Produktionsprozesse dem privaten Sektor zugehören und die verbleibenden $n_2 = n - n_1$ Prozesse dem öffentlichen Sektor. Entsprechend teilen wir die Technologie-Matrix auf in $A = (A_1, A_2)$, den Intensitätenvektor in $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ und den Vektor der Weltmarktpreise in $p(x) = \begin{pmatrix} p^1(x) \\ p^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B^1 & B^2 \\ B^3 & B^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

In dieser Volkswirtschaft ist ein Marktgleichgewicht durch drei nichtnegative Vektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{y}^M$ gegeben, die den folgenden Bedingungen genügen (vgl. Hansen-Manne [43], S.7):

a) Die Ressourcen werden nicht überschritten

$$v := b - A_1 \cdot x^1 - A_2 \cdot x^2 \geq 0$$

b) Kein Prozeß erwirtschaftet einen Gewinn

$$u^1 := -c^1 + B^1 \cdot x^1 + B^2 \cdot x^2 + A_1^T \cdot y^M \geq 0$$

$$u^2 := -c^2 + B^3 \cdot x^1 + B^4 \cdot x^2 + A_2^T \cdot y \geq 0$$

c) Die Marktpreise unterschreiten nicht die Mindestpreise

$$s := y^M - d \geq 0$$

d) Die Marktpreise unterschreiten nicht die Grenzproduktivitäten

$$t := y^M - y \geq 0$$

e) Die Grenzproduktivität eines Faktors, dessen Ressourcen nicht ausgeschöpft sind, ist gleich Null

$$y^T \cdot v = 0$$

f) Verlustbringende Prozesse sind inaktiv

$$(u^1)^T \cdot x^1 + (u^2)^T \cdot x^2 = 0$$

g) Liegt die Grenzproduktivität eines Faktors über seinem Mindestpreis, so gleicht ihr der Marktpreis

$$s^T \cdot t = 0 \quad .$$

Substituieren wir nun c) in b) und d) und definieren

$$M := \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & 0 & A_1^T \\ B^3 & B^4 & A_2^T & 0 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m & I_m \end{pmatrix}, \qquad q := \begin{pmatrix} -c^1 + A_1^T \cdot d \\ -c^2 \\ b \\ d \end{pmatrix},$$

$$w := \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ v \\ t \end{pmatrix}, \qquad z := \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \\ s \end{pmatrix},$$

so erhalten wir aus den Bedingungen a) - g) das lineare Komplementärproblem LK(M,q) . Dieses Komplementärproblem ist allerdings nicht in einer der Klassen von Problemen enthalten, für die bereits gezeigt wurde, daß Lemkes Algorithmus eine Lösung bestimmt, wenn es eine gibt (vgl. Abschnitt 3.2, S. 38 ff sowie Cottle-Dantzig [10] , Eaves [23],

Garcia [36], Karamardian [53], Lemke [59]).
Unter nur schwachen zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich jedoch zeigen, daß LK(M,q) stets eine komplementäre Lösung besitzt, die mit einem geeigneten Komplementärpivot-Algorithmus bestimmt werden kann.

Wir machen dazu folgende Annahmen über die zugrundeliegenden Daten:

(4.5.2.1) Annahme: Die Ressourcen und die Mindestpreise sind positiv: $b > 0$, $d > 0$.

(4.5.2.2) Annahme: Es gibt einen Faktor, der in jedem Prozeß benötigt wird: Alle Komponenten des Vektors $A_{1.}$ sind positiv.

Die Annahme (4.5.2.1) ist nicht einschränkend, sondern technischer Art. Wäre ein b_i gleich Null, so könnte man das Modell entsprechend vereinfachen, indem man in der Matrix M die Zeilen und Spalten n+i, n+m+i sowie die entsprechenden Komponenten der Vektoren w, z, q streicht. Wäre d_α gleich Null für $\alpha \in \{1,..,m\}$, so könnte man für die entsprechenden Faktoren die Restriktionen des Grundmodells beibehalten; das würde jedoch eine weitere Unterteilung der Matrix A erfordern, worauf hier aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung verzichtet wurde.

Die Annahme (4.5.2.2) verschärft Annahme (4.5.1.1). Interpretiert man den ersten Faktor als "Arbeit", so erscheint sie realistisch.

Wir zeigen nun zunächst, daß das Polyeder

$$P := \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; w = M \cdot z + q \right\}$$

(mit den Daten von S.84) eine sehr erfreuliche Eigenschaft hat, wie wir sie (etwas schärfer) bereits kennengelernt haben.†

(4.5.2.3) Satz: Unter den oben gemachten Annahmen hat das Polyeder P genau eine unbeschränkte F-Facette der Klasse n+1.

Beweis: Den Beweis für den Fall konstanter Weltmarktpreise erbrachte der Verfasser bereits an anderer Stelle (siehe Bastian [6]) . Der Beweis für den hier betrachteten allgemeineren Sachverhalt läßt sich analog entwickeln.

Zunächst wird unter Voraussetzung der Existenz einer unbeschränkten fastkomplementären Facette R gezeigt, daß diese Facette eindeutig bestimmt ist.

---

† Man vergleiche die von Lemke und Howson im Zusammenhang mit der Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in Bimatrixspielen betrachteten Polyeder (vgl. Lemke-Howson [60] und S. 64 dieser Arbeit).

Bekanntlich kann man R in folgender Gestalt darstellen:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \geq 0 \right\},$$

wobei $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ ein Extrempunkt von P ist und $\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \geq 0$ eine nichttriviale Lösung des homogenen Systems $w = M \cdot z$. Aus der Nichtnegativität von $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ folgt:

$$\hat{w}^1 = -c^1 + A_1^T \cdot d + B^1 \cdot \hat{z}^1 + B^2 \cdot \hat{z}^2 + A_1^T \cdot \hat{z}^4 \geq 0 \qquad \text{(a.a)}$$

$$\hat{w}^2 = -c^2 + B^3 \cdot \hat{z}^1 + B^4 \cdot \hat{z}^2 + A_2^T \cdot \hat{z}^3 \geq 0 \qquad \text{(a.b)}$$

$$\hat{w}^3 = b - A_1 \cdot \hat{z}^1 - A_2 \cdot \hat{z}^2 \geq 0 \qquad \text{(a.c)}$$

$$\hat{w}^4 = d - \hat{z}^3 + \hat{z}^4 \geq 0 \qquad \text{(a.d)}$$

$$\bar{w}^1 = B^1 \cdot \bar{z}^1 + B^2 \cdot \bar{z}^2 + A_1^T \cdot \bar{z}^4 \geq 0 \qquad \text{(b.a)}$$

$$\bar{w}^2 = B^3 \cdot \bar{z}^1 + B^4 \cdot \bar{z}^2 + A_2^T \cdot \bar{z}^3 \geq 0 \qquad \text{(b.b)}$$

$$\bar{w}^3 = -A_1 \cdot \bar{z}^1 - A_2 \cdot \bar{z}^2 \geq 0 \qquad \text{(b.c)}$$

$$\bar{w}^4 = \bar{z}^4 - \bar{z}^3 \geq 0 \qquad \text{(b.d)}$$

Außerdem sind alle Punkte auf dem Strahl R fastkomplementäre Lösungen der Klasse n+1 und erfüllen daher die Bedingungen:

$$\hat{w}^T \cdot \hat{z} = \hat{w}_1^3 \cdot \hat{z}_1^3 \qquad \text{(c.a)}$$

$$\bar{w}^T \cdot \bar{z} = \bar{w}_1^3 \cdot \bar{z}_1^3 \qquad \text{(c.b)}$$

$$\bar{w}^T \cdot \hat{z} = \bar{w}_1^3 \cdot \hat{z}_1^3 \qquad \text{(c.c)}$$

$$\hat{w}^T \cdot \bar{z} = \hat{w}_1^3 \cdot \bar{z}_1^3 \qquad \text{(c.d)}$$

Wegen der Annahme (4.5.2.2) folgt aus (b.c):

$$\bar{z}^1 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{z}^2 = 0 .$$

Ist $\bar{z}_h^4$ positiv, dann verschwindet wegen (c.b) $\bar{w}_h^4$; mit (b.d) folgt $\bar{z}^4 = \bar{z}^3$, und (b) vereinfacht sich zu

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot \bar{z}^3 \\ A_2^T \cdot \bar{z}^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (b')$$

Aus (c.c) und (b') schließen wir

$$(\bar{w}^1)^T \cdot \hat{z}^1 = (\bar{z}^3)^T \cdot A_1 \cdot \hat{z}^1 = 0 \qquad (i)$$

$$(\bar{w}^2)^T \cdot \hat{z}^2 = (\bar{z}^3)^T \cdot A_2 \cdot \hat{z}^2 = 0 \qquad (ii)$$

und mit (a.c), (c.d) folgt:

$$(\bar{z}^3)^T \cdot \hat{w}^3 = \bar{z}_1^3 \cdot \left\{ b - A_1 \cdot \hat{z}^1 - A_2 \cdot \hat{z}^2 \right\}_1 = \bar{z}_1^3 \cdot b_1$$

sowie $(\bar{z}^3)^T \cdot \hat{w}^3 = (\bar{z}^3)^T \cdot b$.

Da b nach Annahme (4.5.2.1) positiv ist, bedeutet dies, $\bar{z}_h^3 = 0$ für alle $h \neq 1$. $\bar{z}_1^3$ ist positiv, da $\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ nach Voraussetzung nicht identisch Null ist.

Über den Vektor $\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ wissen wir also:

$$\bar{z} = \mu \cdot \left\{ I_{\cdot(n+1)} + I_{\cdot(n+m+1)} \right\} \qquad (\mu > 0)$$

$$\bar{w} = M \cdot \bar{z} . \qquad (iii)$$

Nun zu $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$. Aus (i), (ii), $\bar{z}_1^3 > 0$ und Annahme (4.5.2.2) folgt $\hat{z}^1 = 0$ und $\hat{z}^2 = 0$

$$\xrightarrow[(a.c)]{} \hat{w}^3 > 0 .$$

$$\underset{(c.a)}{=\!=\!=} \quad \hat{z}_h^3 = 0 \qquad \text{für alle } h \neq 1$$

$$\underset{(a.d)}{=\!=\!=} \quad \hat{w}_h^4 > 0 \qquad \text{für alle } h \neq 1$$

$$\underset{(c.a)}{=\!=\!=} \quad \hat{z}_h^4 = 0 \qquad \text{für alle } h \neq 1 \ .$$

Aus $\bar{z}_1^4 = \bar{z}_1^3 > 0$ und der Bedingung (c.d) schließen wir $\hat{w}_1^4 = 0$, woraus mit (a.d) folgt:

$$\hat{z}_1^3 = d_1 + \hat{z}_1^4 > 0 \ .$$

Wir können nun feststellen, daß $\hat{z}_1^4$ (und damit auch $\hat{z}_1^3$ und der gesamte Vektor $\hat{z}$) eindeutig bestimmt ist: wegen (a.a), (a.b) ist $\hat{z}_1^4$ groß genug, um die Nichtnegativität von $\hat{w}^1$ und $\hat{w}^2$ zu garantieren; andererseits nimmt $\hat{z}_1^4$ den kleinsten Wert an, der dieser Bedingung genügt, denn eine Komponente des Vektors $((\hat{w}^1)^T, (\hat{w}^2)^T, \hat{z}_1^4)$ ist gleich Null. Wären nämlich alle Komponenten dieses Vektors positiv, dann hätte $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ n+2m+1 positive Komponenten und wäre folglich kein Extrempunkt des Polyeders P .

Wir haben also gezeigt, daß unter Voraussetzung der Existenz einer unbeschränkten F-Facette der Klasse n+1 die Richtung $\begin{pmatrix}\bar{w}\\ \bar{z}\end{pmatrix}$ (bis auf einen Faktor μ) und der Ursprung $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt sind.

Sei nun $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ der oben bestimmte Extrempunkt von P. Man überzeugt sich leicht davon, daß der Strahl

$$R' := \left\{ \begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} M \cdot z' \\ z' \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \geq 0,\ z' = \left[I_{\cdot(n+1)} + I_{\cdot(n+m+1)} \right] \right\}$$

tatsächlich eine unbeschränkte F-Facette ist.

Δ

Unter der Nichtentartungsannahme (2.2.1) läßt sich in jeder komplementären Lösung $\binom{w^c}{z^c}$ genau ein F-Pfad der Klasse n+1 initiieren: genau einer der Werte w^c_{n+1} , z^c_{n+1} ist nämlich positiv, und durch Erhöhen der Variablen mit dem Wert Null bewegt man sich entlang einer F-Facette der Klasse n+1. Deshalb sind alle komplementären Lösungen - bis auf eine - paarweise durch einen F-Pfad der Klasse n+1 verbunden; nur ein Pfad kann nämlich zu der eindeutig bestimmten unbeschränkten F-Facette dieser Klasse führen. Satz (4.5.2.3) hat also das interessante

(4.5.2.4) Korollar: Das oben dargestellte Gleichgewichtsmodell hat eine ungerade Anzahl von Lösungen.

Grundsätzlich ist mit dem Satz (4.5.2.3) auch geklärt, wie sich eine Gleichgewichtslösung bestimmen läßt: Man initiiert einen F-Pfad der Klasse n+1 im Ursprung t^1 der eindeutig bestimmten unbeschränkten F-Facette dieser Klasse. Erfreulicherweise ist t^1 leicht zu bestimmen.
Das System $-M\cdot z + I\cdot w = q$ liefert das Ausgangstableau:

z^1	z^2	z^3	z^4	w^1	w^2	w^3	w^4	
$-B^1$	$-B^2$	0	$-A_1^T$	I_{n_1}				$-c^1 + A_1^T\cdot d$
$-B^3$	$-B^4$	$-A_2^T$	0		I_{n_2}			$-c^2$
A_1	A_2	0	0			I_m		b
0	0	I_m	$-I_m$				I_m	d

Durch einen Pivotschritt in der Spalte n+1 und der Zeile n+m+1 nehmen wir z^3_1 in die Basis; w^4_1 sinkt dabei

auf Null ab. Die ersten n Komponenten des Konstantenvektors und der Spalte von z_1^4 lauten nun:

$$g := \begin{pmatrix} -c^1 + A_1^T \cdot d \\ -c^2 + d_1 \cdot (A_2^T)_{\cdot 1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h := - \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix}_{\cdot 1} \quad .$$

Die Spalte von z_1^4 ist nichtpositiv und wegen der Annahme (4.5.2.2) sind die ersten n Komponenten (nämlich der Vektor h) sogar negativ. Man erhält daher ein zulässiges System, wenn man z_1^4 weit genug erhöht. Erhöht man z_1^4 noch darüber hinaus, so bewegt man sich entlang einer unbeschränkten F-Facette der Klasse n+1 $(w^T \cdot z = w_1^3 \cdot z_1^3)$. Den Ursprung dieses Strahls erhält man, indem man z_1^4 den kleinsten Wert zuweist, der noch ein zulässiges Tableau liefert. Ist g nichtnegativ, dann kann z_1^4 bis auf den Wert Null abgesenkt werden. Der fastkomplementäre Pfad wird dann durch einen Pivotschritt in der Spalte von w_1^4 fortgesetzt.

Andernfalls erhält man den Ursprung des betrachteten Strahls durch einen Pivotschritt in der Spalte von z_1^4 ; die Pivotzeile i_o wird dabei so gewählt, daß das gesamte Tableau zulässig wird:

$$i_o := \arg\max_i \left\{ \frac{g_i}{h_i} \right\} \quad .$$

Dabei verläßt eine Variable w_j , $1 \le j \le n$, die Basis; der fastkomplementäre Pfad wird durch einen Pivotschritt auf z_j fortgesetzt.

Die Nichtentartungsannahme (2.2.1) und das Fehlen weiterer unbeschränkter F-Facetten der Klasse n+1 garantieren in beiden Fällen den Abbruch des Verfahrens in einer komplementären Lösung.

(4.5.2.5) Bemerkung: Sei $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ die komplementäre Lösung, die durch das oben beschriebene Vorgehen gefunden wurde. Man kann versuchen, weitere Gleichgewichtslösungen dadurch aufzuspüren, daß man in $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ F-Pfade anderer Klassen initiiert (vgl. Hansen-Mathiesen [44]).

(4.5.2.6) Bemerkung: Zuweilen kann das Problem vereinfacht werden, bevor man mit der eigentlichen Rechnung beginnt: wann immer ein Index j existiert mit

$$-c_j^1 + (A_1^T \cdot d)_j > 0 \quad \text{und} \quad (B^1, B^2)_{j.} \geq 0^T,$$

kann die Zeile j des Ausgangstableaus sowie die Spalten von z_j^1 und w_j^1 gestrichen werden†: in jeder komplementären Lösung ist

$$w_j^1 = -c_j^1 + (A_1^T \cdot d)_j + B^1 \cdot z^1 + B^2 \cdot z^2 + A_1^T \cdot z^4$$

positiv und daher z_j^1 gleich Null.
Dies läßt sich ökonomisch folgendermaßen interpretieren: die Mindestpreise d_i der Input-

---

† vgl. das Ausgangstableau auf S. 90 .

faktoren wurden derart hoch festgesetzt, daß der j-te Prozeß des privaten Sektors nicht mehr konkurrenzfähig ist.

Das geschilderte Berechnungsverfahren soll im folgenden Abschnitt an einem einfachen Zahlenbeispiel verdeutlicht werden:

4.5.3 Ein Zahlenbeispiel

Sei $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} & 2 & 5 \end{array}\right)$, $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{4} & & & & & & & \\ & \frac{1}{4} & & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & & & & & \\ \hline & & & & \frac{1}{4} & & & \\ & & & & & & & \frac{1}{2} \end{array}\right), \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ \hline 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B ist nichtnegativ und die dritte Komponente des Vektors $A_1^T \cdot d - c^1$ ist positiv; nach Bemerkung (4.5.8) ist also z_3^1 in jeder komplementären Lösung gleich Null.

Das entsprechend vereinfachte Ausgangstableau hat die folgende Gestalt:

z^1	z^2	z^3	z^4	w^1	w^2	w^3	w^4	
$-\frac{1}{4}$			-4 -1	1				$-3+\frac{5}{2}$
	$-\frac{1}{4}$		-2 -3		1			$-4+\frac{5}{2}$
		$-\frac{1}{4}$	-2 -2			1		-3
		$-\frac{1}{2}$	-1 -5				1	-8
4	2	2	1					12
1	3	2	5					20
		1	-1					$\frac{1}{2}$
			1 -1					$\frac{1}{2}$

Durch einen Pivotschritt auf der Spalte von z_1^3 verläßt w_1^4 die Basis:

$-\frac{1}{4}$			-4 -1	1				$-\frac{1}{2}$
	$-\frac{1}{4}$		-2 -3		1			$-\frac{3}{2}$
		$-\frac{1}{4}$	-2 -2			1	2	-2
		$-\frac{1}{2}$	-5 -1			1	1	$-\frac{15}{2}$
4	2	2	1					12
1	3	2	5					20
		1	-1					$\frac{1}{2}$
			1 -1					$\frac{1}{2}$

Man erkennt, daß dieses Tableau zulässig wird, wenn man z_1^4 weit genug erhöht.

Die Pivotzeile i_o ergibt sich aus:

$$\max\left\{\frac{-1/2}{-4}, \frac{-3/2}{-2}, \frac{-2}{-2}, \frac{-15/2}{-1}\right\} = \frac{15}{2} \quad \Longrightarrow \quad i_o = 4 \ .$$

Das neue Tableau repräsentiert den Ausgangspunkt t^1 eines fastkomplementären Pfades der Klasse 5 :

z^1	z^2	z^3	z^4	w^1	w^2	w^3	w^4	
$-\frac{1}{4}$	2	20	-1	1	-4	-4		$\frac{59}{2}$
$-\frac{1}{4}$	1	10	-3	1	-2	-2		$\frac{27}{2}$
$-\frac{1}{4}$	1	8		1	-2			13
$\frac{1}{2}$	5	1			-1	-1		$\frac{15}{2}$
4 2 2	1					1		12
1 3 2	5					1		20
$\frac{1}{2}$	1 5				-1			8
	1	-1					1	$\frac{1}{2}$

w_2^2 hat die Basis verlassen; man pivotiert daher nun auf der zu w_2^2 komplementären Variablen z_2^2:

$-\frac{13}{20}$ $-\frac{6}{5}$ $-\frac{4}{5}$		20	-1	1	-4	$-\frac{2}{5}$	-4	$\frac{49}{2}$
$-\frac{1}{5}$ $-\frac{17}{20}$ $-\frac{2}{5}$		10	-3	1	-2	$-\frac{1}{5}$	-2	$\frac{19}{2}$
$-\frac{1}{5}$ $-\frac{3}{5}$ $-\frac{13}{20}$		8		1	-2	$-\frac{1}{5}$		9
$-\frac{1}{10}$ $-\frac{3}{10}$ $-\frac{1}{5}$		5	1		-1	$-\frac{1}{10}$	-1	$\frac{11}{2}$
$\frac{19}{5}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{8}{5}$						1	$-\frac{1}{5}$	8
$\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$	1						$\frac{1}{5}$	4
$-\frac{1}{10}$ $-\frac{3}{10}$ $-\frac{1}{5}$	0 1	5			-1	$-\frac{1}{10}$		6
		1	-1				1	$\frac{1}{2}$

dabei verläßt w_2^3 die Basis; man pivotiert infolgedessen anschließend in der Spalte von z_2^3.

Nach drei weiteren Pivotschritten entlang des fastkomplementären Pfades (nämlich auf z_2^4, w_1^4, z_1^2) erhält man das folgende Endtableau, dem man die komplementäre Lösung $\binom{w}{z}$ entnimmt:

$-\frac{35}{132}$	$-\frac{1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	0	-4	0	1	0	$-\frac{4}{33}$	$-\frac{5}{33}$	0	$-\frac{1}{66}$	0	-1	$\frac{3}{11}$
$-\frac{1}{22}$	$-\frac{17}{44}$	0	0	$\frac{13}{11}$	0	-2	0	0	1	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{5}{11}$	0	$-\frac{1}{22}$	0	-3	$\frac{9}{11}$
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{66}$	$-\frac{1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	0	0	1	0	0	$-\frac{4}{33}$	$-\frac{5}{33}$	0	$-\frac{1}{66}$	0	-1	$\frac{17}{22}$
$\frac{119}{33}$	$\frac{9}{11}$	0	0	$-\frac{256}{33}$	0	0	0	0	0	$\frac{160}{33}$	$-\frac{64}{33}$	1	$-\frac{13}{33}$	0	0	$\frac{56}{11}$
$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{11}$	0	1	$-\frac{64}{33}$	0	0	0	0	0	$\frac{40}{33}$	$-\frac{16}{33}$	0	$\frac{5}{33}$	0	0	$\frac{36}{11}$
$\frac{4}{33}$	$\frac{4}{11}$	1	0	$\frac{160}{33}$	0	0	0	0	0	$-\frac{100}{33}$	$\frac{40}{33}$	0	$\frac{4}{33}$	0	0	$\frac{20}{11}$
$-\frac{1}{66}$	$-\frac{1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	1	0	0	0	0	$-\frac{4}{33}$	$-\frac{5}{33}$	0	$-\frac{1}{66}$	0	0	$\frac{14}{11}$

Das gesuchte Marktgleichgewicht $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{y}^M$ ist durch die Intensitäten

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{x}^2 = \hat{z}^2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} \\ \frac{36}{11} \end{pmatrix}$$

und das Preissystem

$$\hat{y} = \hat{z}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{11} \end{pmatrix}, \qquad \hat{y}^M = \hat{z}^4 + d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{14}{11} \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Gesamtwert des outputs beträgt

$$\hat{x}^T \cdot p(\hat{x}) = c^T \cdot \hat{x} - \hat{x}^T \cdot B \cdot \hat{x} = 25\frac{5}{11} .$$

In unserem Beispiel sind wir von der Annahme fallender Grenzerlöskurven ausgegangen ($b_{ii} > 0$) ; in der Tendenz führt dies dazu, daß mehr ökonomische Produktionsprozesse aktiviert werden als unter der Annahme konstanter Weltmarktpreise. Setzt man etwa im Beispiel B gleich Null, so ergibt sich für den Intensitätenvektor im Gleichgewicht:

$\hat{\hat{x}}^1 = 0$, $\hat{\hat{x}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vgl. Bastian [6], S. 16-18); der erste Prozeß des öffentlichen Sektors bleibt also inaktiv.

4.5.4 Zur Problematik der Einführung oberer Preisschranken

Hansen und Manne [43] haben in ihrem Modell die Beschränkung des Marktpreises eines Gutes entweder von oben oder von unten vorgesehen. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Modell von Hansen und Manne für den Fall, daß der Vektor y^M der Marktpreise von unten durch einen Vektor d und von oben durch $D \geq d$ eingeschränkt wird.† Wir setzen also zwischen y_i^M und y_i die folgende Beziehung voraus:

$$(I) \qquad y_i^M = \begin{cases} d_i & \text{für} \quad y_i \leq d_i \\ y_i & \text{für} \quad d_i < y_i < D_i \\ D_i & \text{für} \quad D_i \leq y_i \end{cases} .$$

Es wird gezeigt, daß die Einführung scharfer oberer Preisschranken die Existenz einer Gleichgewichtslösung gefährdet. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Gleichgewichtslösung wird hergeleitet, und Strategien zur Berechnung solcher Lösungen werden diskutiert.

Eine Gleichgewichtslösung des verallgemeinerten Modells ist wiederum ein Tripel nichtnegativer Vektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{y}^M$, die den Bedingungen a), b), e), f) aus Abschnitt 4.5.2 genügen. Die Bedingung c) muß erweitert werden, um den

---

† Ist für ein Gut i kein Mindestpreis gegeben, so setze man $d_i := 0$; existiert für ein Gut j keine obere Preisschranke, so weise man D_j den Wert einer 'sehr großen' Zahl zu.

oberen Preisschranken D_i Rechnung zu tragen:

(c') $\quad s^d := y^M - d \geq 0$

$\quad s^D := D - y^M \geq 0$.

Im Modell des Abschnitts 4.5.2 sind die funktionalen Beziehungen zwischen den Variablen y_i^M und y_i durch die Bedingungen d) und g) gegeben; die entsprechenden Beziehungen des verallgemeinerten Modells sind oben in der Bedingung (I) festgehalten, die wir nun durch äquivalente Restriktionen ersetzen wollen:

(4.5.4.1) Lemma: Seien x, y, y^M Vektoren, die das System a), b), c'), e), f) (siehe S. 83 f) lösen.
Dann ist die Bedingung (I) äquivalent mit:
(II) Es existieren m-Vektoren t^d und t^D so, daß gilt:

d') $\quad t^d - t^D = y^M - y, \quad t^d \geq 0, \quad t^D \geq 0$

g') $\quad (t^d)^T . s^d = 0$

$\quad (t^D)^T . s^D = 0$.

Beweis: Erfülle y, y^M die Bedingung (I).
Gilt $y_i \leq d_i$, so wähle man $t_i^D = 0$, $t_i^d = y_i^M - y_i$.
Wegen $y_i \leq d_i = y_i^M$ folgt d') und
wegen $s_i^d = y_i^M - d_i = 0$ und $t_i^D = 0$ auch g').
Gilt $D_i \leq y_i$, so wähle man $t_i^d = 0$, $t_i^D = y_i - y_i^M$.
Wegen $y_i \geq D_i = y_i^M$ folgt d') und
wegen $s_i^D = D_i - y_i^M = 0$ und $t_i^d = 0$ auch g').

Gilt $d_i < y_i < D_i$ so folgen d') und g') für $t_i^d = t_i^D = 0$.

Erfülle nun y, y^M die Bedingung (II).

Dann existieren für $i=1,..,m$ nichtnegative Zahlen t_i^d und t_i^D mit der Eigenschaft:

$y_i^M = t_i^d - t_i^D + y_i$ und $t_i^d \cdot s_i^d = t_i^D \cdot s_i^D = 0$.

Wegen c') folgt daraus:

$d_i - y_i \leq y_i^M - y_i = t_i^d - t_i^D \leq D_i - y_i$ sowie

$t_i^d \cdot (y_i^M - d_i) = 0$ und $t_i^D \cdot (D_i - y_i^M) = 0$.

Gilt $y_i < d_i$, so folgt $0 < t_i^d - t_i^D$;

t_i^d ist also positiv und erzwingt $y_i^M = d_i$.

Gilt $D_i < y_i$, so folgt $t_i^d - t_i^D < 0$;

t_i^D ist also positiv und erzwingt $y_i^M = D_i$.

Gilt $d_i \leq y_i \leq D_i$, so folgt $y_i^M = y_i$.

Wäre nämlich y_i^M größer als y_i, genauer,

$$y_i^M = t_i^d - t_i^D + y_i > y_i \geq d_i,$$

dann wäre t_i^d positiv und folglich $y_i^M = d_i$,

ein Widerspruch.

Wäre y_i^M kleiner als y_i, dann wäre entsprechend t_i^D positiv und $y_i^M = D_i$ im Widerspruch zu $y_i^M < y_i \leq D_i$.

Die Vektoren y^M und y erfüllen demnach auch das System (I).

Δ

Ersetzt man y^M in b), c') und d') durch $y^M = s^d + d$, so erscheint das Problem ein Marktgleichgewicht zu finden, d.h. eine Lösung des Systems a), b), c'), d'), e), f), g'), in der Form eines linearen Komplementärproblems LK(M,q) mit:

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \\ w^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ v \\ t^d \\ s^D \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \\ s^d \\ t^D \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & 0 & A_1^T & 0 \\ B^3 & B^4 & A_2^T & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m & I_m & I_m \\ 0 & 0 & 0 & -I_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} -c^1 + A_1^T \cdot d \\ -c^2 \\ b \\ d \\ D - d \end{pmatrix} .$$

Man erkennt die formale Ähnlichkeit mit dem linearen Komplementärproblem des Abschnitts 4.5.2: Es wurden nur m Zeilen hinzugefügt sowie die Spalten der Variablen w_i^5 und z_i^5 $(i=1,\cdots,m)$.

Dennoch ist der Schwierigkeitsgrad des hier betrachteten Problems erheblich größer: die Existenz einer komplementären Lösung ist nicht mehr gewährleistet.

Der nachfolgende Satz enthält eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Marktgleichgewichts:

(4.5.4.2) Satz: Das betrachtete Problem LK(M,q) ist genau dann zulässig, wenn ein nichtnegativer Vektor x existiert, der den Bedingungen

(i) $A_1^T \cdot D \geq c^1 - (B^1, B^2) \cdot x$ und $A \cdot x \leq b$

genügt.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, geben wir noch eine ökonomische Interpretation dieses Sachverhalts: existiert ein Marktgleichgewicht, so gibt es auch einen Intensitätenvektor, bei dessen Einsatz eine gewinnfreie Produktion möglich ist und die vorhandenen Ressourcen nicht überschritten werden. Dieser Satz verallgemeinert ein Ergebnis des Verfassers für den Fall konstanter Weltmarktpreise (vgl. Bastian [6], S. 20).

Beweis zu Satz (4.5.4.2): Ist LK(M,q) zulässig, dann existieren nichtnegative Vektoren $w \geq 0$, $z \geq 0$ mit der Eigenschaft $w = M \cdot z + q$. Insbesondere gilt:

$$w^3 = -A_1 \cdot z^1 - A_2 \cdot z^2 + b \geq 0$$

und $$w^1 + A_1^T \cdot w^5 = B^1 \cdot z^1 + B^2 \cdot z^2 - c^1 + A_1^T \cdot D \geq 0 .$$

$x = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ erfüllt also die Bedingung (i).

Existiert andererseits eine nichtnegative Lösung x von (i), dann setze man

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = x, \quad z^4 = 0, \quad z_i^3 = z_i^5 = 0 \text{ für alle } i \neq 1,$$
$$z_1^3 = z_1^5 = G >> 0 \text{ und } w = M \cdot z + q .$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß w nichtnegativ ist, womit gezeigt wäre, daß LK(M,q) zulässig ist.

Δ

Unglücklicherweise ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Marktgleichgewichts nicht bekannt und wohl auch nicht zu erwarten: "It seems to me that the problem with upper bounds is serious; i.e., I don't believe that it is possible to give simple general conditions which ensure the existence of an equilibrium in that case."† Insbesondere ist es nicht auszuschließen, daß Lemkes Algorithmus, angewandt auf das Problem LK(M,q,a), in einer unbeschränkten F-Facette abbricht, obgleich die Bedingung (i) von Satz (4.5.4.2) erfüllt ist; man ist also auf ein mehr heuristisches Vorgehen angewiesen, für welches ein erfolgreicher Abbruch nicht garantiert werden kann. Ein derartiges Verfahren hat z.B. von de Panne [76] vorgeschlagen. Der Vorteil seines Algorithmus' gegenüber dem von Lemke liegt in der Durchführung zusätzlicher Tests auf Unzulässigkeit von LK(M,q). Solche Tests sind für unser Problem jedoch überflüssig, wenn die Bedingung (i) von Satz (4.5.4.2) überprüft wurde.

Der Verfasser schlägt vor, bei der Suche nach einem Marktgleichgewicht die oberen Preisschranken zunächst zu vernachlässigen und das Problem von Abschnitt 4.5.2 zu lösen. Nachträglich sollte man dann versuchen, die oberen Preisschranken - soweit möglich - zu verwirklichen.
Im einzelnen könnte dies folgendermaßen geschehen:

---

† Prof. J.J.M. Evers, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale Univ. (private Mitteilung 24.3.1975).

(4.5.4.3) Ein heuristisches Verfahren

Voraussetzung: Gegeben sei das Problem LK(M,q) mit den Daten von S. 100 ; die Annahme (2.2.1) sei erfüllt.

Schritt 1: Man prüfe, ob die Menge

$$S := \{R^n \ni x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b,\ A_1^T \cdot D \geq c^1 - (B^1, B^2) \cdot x\}$$

leer ist.† Falls $S = \emptyset$, STOP.

Kommentar: es existiert kein Marktgleichgewicht.

Schritt 2: Man betrachte das Ausgangstableau

-M	I	q

und führe darin eine Folge von Pivotoperationen aus; die Pivotelemente sind dabei so auszuwählen, als würde der Algorithmus von Abschnitt 4.5.2 auf das entsprechende Teiltableau angewandt.§

Kommentar: aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 4.5.2 erhält man auf diese Weise einen Vektor $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ mit $\hat{w}^T \cdot \hat{z} = 0$, $\hat{z} \geq 0$, $\hat{z}^5 = 0$ und $\hat{w}^j \geq 0$ für $j = 1,2,3,4$.

---

† Für den Fall konstanter Weltmarktpreise reduziert sich dies auf die Prüfung der Bedingung $A_1^T \cdot D \geq c^1$. Andernfalls läßt sich z.B. die Phase I der Simplexmethode (vgl. Dantzig [15], S. 100 ff) verwenden.

§ Man pivotiert also nie in einer der letzten m Zeilen; der gesamte Vektor w^5 bleibt in der Basis und alle z_i^5 behalten den Wert Null. Dabei wird möglicherweise die Bedingung $w^5 \geq 0$ verletzt.

Schritt 3: Gilt $\hat{w}^5 \geq 0$, STOP.

Kommentar: $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ löst LK(M,q).

Andernfalls füge man in das zu $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ gehörige Tableau eine zusätzliche Spalte $-a = \begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix} \in R^{n+3m}$, $f \in R^m$, ein mit:

$$f_i = \begin{cases} -1 & \text{falls } \hat{w}_i^5 < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Kommentar: Dies entspricht der Erweiterung des im Ausgangstableau dargestellten Systems auf $w = M \cdot z + F \cdot a \cdot z^0 + q$, wobei F die zu $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ gehörende Basismatrix ist.

Schritt 4: Durch einen Pivotschritt in der Spalte -a initiiere man Lemkes Algorithmus. Während der Iterationen speichere man diejenige Zwischenlösung $(\bar{w}^T, \bar{z}^T, \bar{z}^0)^T$, in der $\bar{z}^0$ am kleinsten ist.

Kommentar: man erkennt:

bricht Lemkes Algorithmus† in einer komplementären Lösung ab, so ist dies eine Lösung von LK(M,q); andernfalls hat man den Vektor $\begin{pmatrix}\bar{w}\\ \bar{z}\end{pmatrix}$, der das Problem löste, wenn die oberen Preisschranken nicht durch D, sondern durch $D - f \cdot \bar{z}^0 \geq D$ gegeben wären.

---

† Oben (vgl. S. 26) wurde die Endlichkeit von Lemkes Algorithmus nur für den Fall $a > 0$ gezeigt. Man müßte also entweder im Programm die Möglichkeit des 'Kreisens' berücksichtigen, oder aber die lexikographische Form des Lemke-Algorithmus' von Eaves [23] verwenden. Bezeichnet $\hat{q}$ den Konstantenvektor des Endtableaus von Schritt 2, so ist $(a, \hat{q})$ offensichtlich lexikographisch positiv; der Algorithmus von Eaves (siehe Eaves [23], S. 613) ist also anwendbar.

Bemerkung: Man könnte auch auf die Einführung der Variablen z^o verzichten und stattdessen den Konstantenvektor parametrisieren (vgl. Bastian [6], S. 20 f).

Das vorgeschlagene Verfahren soll nun noch kurz am Beispiel von Abschnitt 4.5.3 erläutert werden.
Nach Durchführung der Schritte 1, 2 und 3 erhält man das umseitig aufgeführte Tableau.†
Man erkennt:

1. Falls $D_2 \geq \frac{14}{11}$ vorgegeben wird, repräsentiert das vorliegende Tableau ein Marktgleichgewicht (unabhängig von der Wahl von $D_1 \geq d_1$).

2. Für $1 \leq D_2 \leq \frac{14}{11}$ erhält man in Schritt 4 bereits nach zwei Pivotschritten (in den Spalten von z^o und z_2^5) eine komplementäre Lösung.

3. Für $D_1 = \frac{1}{2}$ und $D_2 < \frac{3}{4}$ existiert kein Marktgleichgewicht. Dies ermittelt man z.B. durch Lösen des linearen Programms : minimiere D_2
über $S = \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b, -(B^1, B^2) \cdot x + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot D_2 \leq \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - c^1\}$.

---

† In diesem Fall greift man natürlich auf das Endtableau von S. 96 zurück und ergänzt es um die (entsprechend aufbereiteten) Spalten von z^5 und w^5 sowie um m zusätzliche Zeilen.

z^0	z^1		z^2		z^3		z^4		z^5		w^1		w^2		w^3		w^4		w^5		
0	$\frac{-35}{132}$	$\frac{-1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	0	-4	0	0	1	1	0	$\frac{-4}{33}$	$\frac{-5}{33}$	0	$\frac{-1}{66}$	0	-1	0	0	$\frac{3}{11}$
0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{-17}{44}$	0	0	$\frac{13}{11}$	0	-2	0	0	3	0	1	$\frac{-4}{11}$	$\frac{-5}{11}$	0	$\frac{-1}{22}$	0	-3	0	0	$\frac{9}{11}$
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{-1}{66}$	$\frac{-1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	0	0	1	0	1	0	0	$\frac{-4}{33}$	$\frac{-5}{33}$	0	$\frac{-1}{66}$	0	-1	0	0	$\frac{17}{22}$
0	$\frac{119}{33}$	$\frac{9}{11}$	0	0	$\frac{256}{-33}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{160}{33}$	$\frac{-64}{33}$	1	$\frac{-13}{33}$	0	0	0	0	$\frac{56}{11}$
0	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{11}$	0	1	$\frac{-64}{33}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{40}{33}$	$\frac{-16}{33}$	0	$\frac{5}{33}$	0	0	o	0	$\frac{36}{11}$
0	$\frac{4}{33}$	$\frac{4}{11}$	1	0	$\frac{160}{33}$	0	0	0	-1	0	0	0	$\frac{100}{-33}$	$\frac{40}{33}$	0	$\frac{4}{33}$	0	0	0	0	$\frac{20}{11}$
0	$\frac{-1}{66}$	$\frac{-1}{22}$	0	0	$\frac{13}{33}$	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{-4}{33}$	$\frac{-5}{33}$	0	$\frac{-1}{66}$	0	0	0	0	$\frac{14}{11}$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$D_1 - \frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{22}$	0	0	$\frac{-13}{33}$	0	0	0	0	-1	0	0	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{33}$	0	$\frac{1}{66}$	0	1	0	1	$D_2 - \frac{14}{11}$

Läßt sich nun für alle D_2 zwischen $\frac{3}{4}$ und 1 (für $D_1 = \frac{1}{2}$) mit dem vorgeschlagenen Verfahren ein Marktgleichgewicht bestimmen? Diese Frage kann bejaht werden.

Für $\frac{79}{100} \leq D_2 \leq 1$ erhält man im Schritt 4 nach Pivotoperationen in den Spalten von z^0, z_2^5, z_2^1 das Marktgleichgewicht:

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \cdot D_2 \\ 12 - 12 \cdot D_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}^2 = \hat{z}^2 = \begin{pmatrix} \frac{160}{33} \cdot D_2 - \frac{100}{33} \\ \frac{200}{33} \cdot D_2 - \frac{92}{33} \end{pmatrix},$$

$$\hat{y} = \hat{z}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{62}{33} - \frac{20}{33} \cdot D_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{y}^M = \hat{w}^4 - \hat{z}^5 + \hat{z}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{62}{33} - \frac{53}{33} \cdot D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{62}{33} - \frac{20}{33} \cdot D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ D_2 \end{pmatrix}.$$

Der Gesamtwert des outputs beträgt dann:

$$\hat{x}^T \cdot p(\hat{x}) = c^T \cdot \hat{x} - \hat{x}^T \cdot B \cdot \hat{x}$$

$$= \frac{944}{33} + \frac{100}{33} \cdot D_2 - 40 \cdot (1 - D_2)^2 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{160}{33} \cdot D_2 - \frac{100}{33})^2 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{200}{33} \cdot D_2 - \frac{92}{33})^2 .$$

Für $\frac{3}{4} \leq D_2 \leq \frac{79}{100}$ erhält man im Schritt 4 nach Pivotoperationen in den Spalten von z^0, z_2^5, z_2^1, z_1^3 das Marktgleichgewicht:

$$\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \cdot D_2 \\ 12 - 12 \cdot D_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}^2 = \hat{z}^2 = \begin{pmatrix} 20 \cdot D_2 - 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \hat{z}^3 = \begin{pmatrix} \frac{79}{32} - \frac{25}{8} \cdot D_2 \\ \frac{29}{32} + \frac{5}{8} \cdot D_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}^M = \hat{w}^4 - \hat{z}^5 + \hat{z}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ D_2 \end{pmatrix}.$$

Der Gesamtwert des outputs beträgt:

$$\underline{x}^T \cdot p(\underline{x}) = 29 - 40 \cdot (1-D_2)^2 - \frac{25}{4} \cdot (4 \cdot D_2 - 3)^2 \ .$$

Wir fassen diese Ergebnisse noch einmal tabellarisch für einige Zahlenwerte von D_2 zusammen:

D_2	$\underline{x}^1$			$\underline{x}^2$		y		y^M		$\underline{x}^T \cdot p(\underline{x})$
$\frac{14}{11}$	0	0	0	$\frac{20}{11}$	$\frac{36}{11}$	0	$\frac{14}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{11}$	$25\frac{5}{11}$
1	0	0	0	$\frac{20}{11}$	$\frac{36}{11}$	0	$\frac{14}{11}$	$\frac{1}{2}$	1	$25\frac{5}{11}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{28}{33}$	$\frac{68}{33}$	0	$\frac{46}{33}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$27\frac{7}{55}$
$\frac{3}{4}$	1	3	0	0	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$26\frac{1}{2}$

Man erkennt, wie durch eine schärfere Begrenzung des Inland-Preisniveaus die Wettbewerbsfähigkeit des privaten Sektors zunimmt und die Produktion sich entsprechend verlagert (die Komponenten von x^1 wachsen, diejenigen von x^2 werden kleiner). Interessanterweise nimmt der Gesamterlös, den der output auf dem Weltmarkt erzielt, nicht monoton ab. Im dargestellten Modell können also geeignet festgesetzte Preisobergrenzen gesamtwirtschaftlich durchaus nützlich sein.

4.6 Die Bestimmung eines im Nutzenmaximum invarianten Investitionsmittelbestands im Modell einer Volkswirtschaft mit linearer Technologie

4.6.1 Das Modell von Hansen und Koopmans

Hansen und Koopmans [42] betrachten eine Volkswirtschaft mit n Produktionsprozessen, m+h Inputfaktoren sowie m+k produzierten Gütern und Leistungen. Die m Investitionsgüter dieser Wirtschaft treten sowohl als inputs als auch als outputs auf. h weitere Inputfaktoren sowie k weitere outputs sind Verbrauchsgüter bzw. Dienstleistungen.
Die lineare Technologie ist im Zeitablauf konstant und durch vier Matrizen A, B, V, K gegeben. A, B sind dabei die von Neumannschen Input-Output-Matrizen für den Investitionsgüterbereich, und V, K betreffen den Verbrauch an sonstigen inputs bzw. die Erzeugung sonstiger outputs. Wird der Produktionsprozeß j mit der Einheitsintensität betrieben, so bezeichnet im einzelnen:

A_{ij} den hierzu erforderlichen Bedarf am Investitionsgut i,

B_{ij} den nach der Produktion vorliegenden Bestand am Investitionsgut i ($B_{ij} = A_{ij}$ - Verschleiß + Neuzugang aus dem Produktionsprozeß j),

V_{rj} den Bedarf am Verbrauchsgut r,

K_{sj} die hierbei erzeugte Menge am Konsumgut s.

An diese Daten werden die folgenden Anforderungen gestellt (vgl. Hansen-Koopmans [42], S. 490) :

(4.6.1.1) Annahmen:

(i) $A, B, V, K \geq 0$ (nichtnegative Quantitäten);

(ii) $A \cdot e_n, B \cdot e_n, V \cdot e_n, K \cdot e_n > 0$
(von jedem betrachteten Investitionsgut ist zu Beginn und am Ende jeder Periode eine positive Quantität vorhanden; nach jedem Konsumgut besteht Bedarf, und jedes Verbrauchsgut ist vorhanden);

(iii) $e_m^T \cdot A,\ e_k^T \cdot K + e_m^T \cdot B,\ e_h^T \cdot V > 0$
(jeder Prozeß erfordert mindestens zwei inputs: ein Investitionsgut und ein Verbrauchsgut; bei der Produktion wird mindestens ein Gut erzeugt, sei es ein Investitionsgut oder ein Konsumgut).

Die Ressourcen an Verbrauchsgütern, die pro Periode für die Produktion bereitstehen, sind durch den h-Vektor b begrenzt. Ferner bezeichne

der m-Vektor $z(t) \geq 0$ den Bestand an Investitionsgütern zu Beginn der Periode t,

der k-Vektor $y(t) \geq 0$ den Konsum in der Periode t,

der n-Vektor $\tilde{x}(t) \geq 0$ das Intensitätsniveau der Produktionsprozesse .

Damit erhält man das folgende Restriktionensystem:

a) In keiner Periode überschreitet der Investitionsmittelbedarf die vorhandenen Kapazitäten:

$$A \cdot \tilde{x}(t) \leq z(t) \qquad t=1,2,..$$

b) Zu Beginn einer Periode stehen nicht mehr Investitionsgüter zur Verfügung als am Ende der Vorperiode:

$$B \cdot \tilde{x}(t) \geq z(t+1) \qquad t=1,2,..$$

c) Der Bedarf an Verbrauchsgütern übersteigt in keiner Periode die begrenzten Ressourcen:

$$V \cdot \tilde{x}(t) \leq b \qquad t=1,2,..$$

d) Die Produktion an Konsumgütern deckt in jeder Periode den Bedarf:

$$K \cdot \tilde{x}(t) \geq y(t) \qquad t=1,2,..$$

Die Zielfunktion der betrachteten Volkswirtschaft beinhaltet eine Maximierung des Gesamtnutzens und wird folgendermaßen spezifiziert (vgl. Hansen-Koopmans [42], S. 491 und Evers [31], S. 8) :

e) In jeder einzelnen Periode ist der Nutzen eines Konsumvektors y durch die Funktion $u(y)$ gegeben, die unabhängig vom Periodenindex t ist.

f) $u(y)$ ist für jeden Konsumvektor y definiert, konkav, stetig differenzierbar und in jeder Komponente y_s von y streng monoton wachsend.

g) Der Gesamtnutzen einer Folge $y(1), y(2),..$ von Konsumvektoren ist gleich der Summe der diskontierten

Periodennutzen und ist gegeben durch:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot u(\hat{y}(t)) \quad , \qquad 0 < \alpha < 1 \; .$$

Die gestellte Aufgabe ist nun das Auffinden einer Anfangsausstattung $z(1)$ von Investitionsgütern mit der Eigenschaft, daß im Nutzenmaximum diese Ausrüstung über alle Perioden unverändert erhalten bleibt, d.h. $z(1) = z(2) = \cdots$. Dieses Problem ist (unter einigen weiteren Annahmen) von Dantzig und Manne [18] sowie von Evers [31] als lineares Komplementärproblem formuliert und gelöst worden. Wir stützen uns hier vor allem auf die Arbeit von Evers, da sein Ansatz allgemeiner ist und auch für andere verwandte Probleme eine erfolgreiche Anwendung erwarten läßt.

4.6.2 Zur Beziehung zwischen der linearen Optimierung mit unendlichem Horizont und einem linearen Komplementärproblem

Wir betrachten im folgenden das lineare Programm mit unendlichem Horizont (LPUH) und setzen es in Beziehung zu einem linearen Komplementärproblem.

$$\text{(LPUH):} \quad \text{minimiere} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot c^T \cdot x(t)$$

$$\text{über} \quad S := \left\{ \begin{cases} x(t) \geq 0 \\ t=1,2,\cdots \end{cases} \;\middle|\; \begin{array}{l} G \cdot x(1) \leq f + F \cdot x(0), \\ G \cdot x(t+1) - F \cdot x(t) \leq f \\ \text{für alle} \quad t=1,2,\cdots \end{array} \right\}$$

Dabei fassen wir $x(t)$ als einen Vektor ökonomischer Zustandsvariablen im Zeitpunkt t auf und $0 < \alpha < 1$ als einen Diskontierungsfaktor; die Matrizen G, F sowie der Vektor f seien gegeben.

(4.6.2.1) Definition: Eine Lösung $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ des linearen Komplementärproblems LK(M,q) mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & G^T - \alpha \cdot F^T \\ F-G & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

heißt eine Gleichgewichtskombination von (LPUH).

Wir betrachten zudem folgende

(4.6.2.2) Voraussetzung: $G_{ij} < 0$ impliziert

$$F_{i.} \geq 0 \quad \text{und} \quad f_i \geq 0.$$

Es gilt der folgende Satz, zu dessen Beweis wir auf die Arbeit von Evers ([31], S. 2-6) verweisen:

(4.6.2.3) Satz: Sei die Voraussetzung (4.6.2.2) erfüllt und $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ eine Gleichgewichtskombination von (LPUH). Wählt man $x(0) = \hat{z}^1$, dann ist $x(t) = \hat{z}^1$ für alle $t=1,2,\cdots$ eine optimale Lösung von (LPUH).

Dieser Satz macht es attraktiv, die Lösbarkeit des oben betrachteten linearen Komplementärproblems zu untersuchen. Dazu vergewissere man sich zunächst davon, daß sich die

Matrix M auch in der Form

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (H^T + C^T)\cdot D \\ -H & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben läßt, wobei gilt:

$$C_{i.} = \begin{cases} (\frac{1}{\alpha} - 1)\cdot G_{i.} & \text{falls } G_{i.} \geq 0 \\ (1 - \alpha)\cdot F_{i.} & \text{sonst} \end{cases},$$

$H := G-F$ und D eine Diagonalmatrix ist mit

$$D_{ii} = \begin{cases} \alpha & \text{falls } G_{i.} \geq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei $\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & H^T+C^T \\ -H & 0 \end{pmatrix}$. Man beachte, daß $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ genau dann eine Lösung von LK(M,q) ist, wenn $\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z}^1 \\ D\cdot\hat{z}^2 \end{pmatrix}$ LK($\bar{M}$,q) löst und daß aufgrund der Voraussetzung (4.6.2.2) die Matrix C nichtnegativ ist.

Evers ([31], S. 16ff) zeigte, daß unter der Voraussetzung

$$S_1 := \{x \geq 0 \mid (H+C)\cdot x < f\} \neq \emptyset$$

und $$S_2 := \{u \geq 0 \mid -H^T\cdot u < c\} \neq \emptyset$$

Lemkes Algorithmus eine Lösung von LK($\bar{M}$,q) bestimmt. Dantzig und Manne ([18], S. 13) kamen zu dem gleichen Ergebnis unter der Voraussetzung, daß die linearen Programme

(I) minimiere $c^T\cdot x$

über $\{x \geq 0 \mid H\cdot x \leq f\}$,

(II) minimiere $f^T \cdot u$

über $\{ u \geq 0 \mid -(H^T+C^T) \cdot u \leq c \}$

endliche optimale Lösungen besitzen.

Wie das folgende Lemma zeigt, sind die Voraussetzungen von Dantzig und Manne schwächer als die von Evers:

(4.6.2.4) Lemma: Die linearen Programme (I) und (II) haben genau dann (endliche) optimale Lösungen, wenn gilt:

$S_3 := \{ x \geq 0 \mid (H+C) \cdot x \leq f \} \neq \emptyset$ und

$S_4 := \{ u \geq 0 \mid -H^T \cdot u \leq c \} \neq \emptyset$.

Beweis: Nach dem Dualitätssatz der linearen Optimierung (siehe z.B. Dantzig [15], S. 129) besitzen (I) und (II) genau dann (endliche) optimale Lösungen, wenn gilt:

$P_1 := \{ x \geq 0 \mid H \cdot x \leq f \} \neq \emptyset$

$P_2 := \{ u \geq 0 \mid H^T \cdot u \geq -c \} \neq \emptyset$

$P_3 := \{ u \geq 0 \mid -(H^T+C^T) \cdot u \leq c \} \neq \emptyset$

$P_4 := \{ x \geq 0 \mid -(H+C) \cdot x \geq -f \} \neq \emptyset$.

Aus der Nichtnegativität von C folgt nun

$S_3 = P_4 \subset P_1$, $S_4 = P_2 \subset P_3$

und damit die Behauptung.

Δ

(4.6.2.5) Korollar: Sei $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & H^T+C^T \\ -H & 0 \end{pmatrix}$, $C \geq 0$ und $q = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$. Sind die Mengen $\{ u \geq 0 \mid -H^T \cdot u \leq c \}$ und $\{ x \geq 0 \mid (H+C) \cdot x \leq f \}$ nicht leer, dann bestimmt Lemkes Algorithmus eine Lösung des linearen Komplementärproblems $LK(\bar{M},q)$.

4.6.3 Die Problemstellung als lineares Programm mit unendlichem Horizont

In diesem Abschnitt wird das Problem der Bestimmung eines im Nutzenmaximum invarianten Investitionsgüterbestandes im Modell von Hansen und Koopmans als lineares Programm mit unendlichem Horizont formuliert und mit Hilfe von Lemkes Algorithmus gelöst.

Eliminiert man im Restriktionensystem a) - d) des Abschnitts 4.6.1 (siehe S. 111) die Vektoren $z(t)$, so erhält man Nebenbedingungen in der Form des Programms (LPUH) mit

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 0 \\ -K & I \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist möglich, da die Nichtnegativität von $z(t) \geq A \cdot \tilde{x}(t)$ durch die Nichtnegativität von A und von $\tilde{x}(t)$ garantiert ist.

Nach der Bestimmung einer Folge von Vektoren $\hat{x} = \hat{x}(1) = \hat{x}(2) = \cdots$, die (LPUH) optimieren (vgl. Abschnitt 4.6.2), erhält man dann den invarianten Investitionsgüterbestand durch Wahl eines Vektors $\hat{z}$ mit der Eigenschaft: $A \cdot \hat{x} \leq \hat{z} \leq B \cdot \hat{x}$.

Noch zu erörtern ist das Problem einer geeigneten Linearisierung der durch die Bedingungen e) - g) von Seite 111 gegebenen Zielfunktion.
Ist die Zielfunktion separabel, d.h. läßt sie sich in der Form

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot u(y(t)) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j} \alpha^t \cdot u_j(y_j(t))$$

schreiben, und hat man gewisse Schranken $\underline{y}_j$ und $\overline{y}_j$, innerhalb derer man den Optimalwert von y_j weiß, so kann die Zielfunktion auf klassische Weise (vgl. Dantzig [15], Kap. 24-3) beliebig genau linear approximiert werden. Für jeden Index j wählt man dazu n_j Punkte aus dem Intervall $[\underline{y}_j, \overline{y}_j]$ mit

$$\underline{y}_j = \hat{y}_{j1} < \hat{y}_{j2} < \cdots < \hat{y}_{jn_j} = \overline{y}_j$$

und ersetzt y_j im Restriktionensystem durch

$$y_j = \sum_{i+1}^{n_j} \hat{y}_{ji} \cdot \mu_{ji} \cdot$$

Die neuen Variablen μ_{ji} werden ebenfalls nichtnegativ vorausgesetzt und erfüllen die zusätzliche Bedingung $\sum_i \mu_{ji} = 1$. Die linearisierte Zielfunktion lautet:

$$\sum_t \sum_j \alpha^t \cdot \sum_{i=1}^{n_j} u_j(\hat{y}_{ji}(t)) \cdot \mu_{ji} \cdot$$

Entsprechendes gilt natürlich auch dann, wenn die gegebene Zielfunktion selbst zwar nicht separabel ist, aber durch eine separable Funktion ersetzt werden kann, die ihr Optimum am gleichen Extrempunkt des Beschränkungspolyeders annimmt.

Diesen Weg haben Dantzig und Manne ([18], S. 14ff) beschritten und berichten über ermutigende Rechenergebnisse. Sie benutzten die Daten des Beispiels von Hansen und Koopmans (vgl. [42], S. 513), in dem sie die Zielfunktion $u(y) = (y_1)^{0.2} \cdot (y_2)^{0.2} \cdot (y_3)^{0.2}$ der Einzelperioden logarithmierten und durch die separable Funktion $\log u(y) = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{5} \cdot \log y_j$ ersetzten.

Wir folgen hier Evers ([31], S. 8-9), der den Konsumvektor $y(t)$ in eine Summe von (zum Beispiel) drei Teilvektoren $y(t) = y^1(t) + y^2(t) + y^3(t)$ zerlegt mit

$$\left.\begin{aligned} 0 \le y^1(t) &\le v^1 \\ 0 \le y^2(t) &\le v^2 \\ 0 \le y^3(t) & \end{aligned}\right\} \qquad t=1,2,\ldots$$

und dann davon ausgeht, daß die Nutzenfunktion einer Einzelperiode durch den Ausdruck

$$p^T \cdot y^1(t) + r^T \cdot y^2(t) + s^T \cdot y^3(t), \qquad p > r > s,$$

hinreichend genau approximiert werden kann.
Für den Fall einer separablen Zielfunktion entspricht dies übrigens genau der Vorgehensweise von Dantzig und Manne,

wenn man die Schranken $\underline{y}_j = 0$, $\bar{y}_j = \infty$ wählt und die Zwischenpunkte $\hat{y}_{j2} = v_j^1$, $\hat{y}_{j3} = v_j^1 + v_j^2$.

Die Größen $p_j = \dfrac{u_j(v_j^1)}{v_j^1}$, $r_j = \dfrac{u_j(v_j^1 + v_j^2) - u_j(v_j^1)}{v_j^2}$

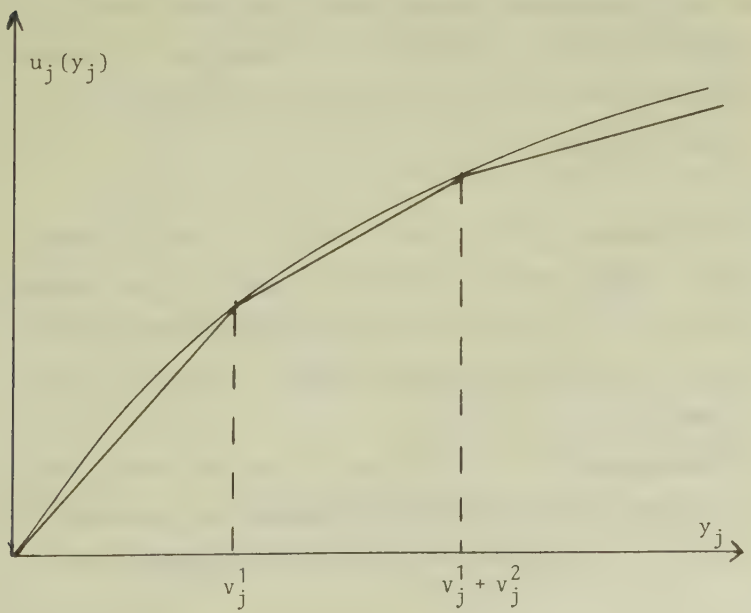
und $s_j = \lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{u_j(v_j^1 + v_j^2 + \xi) - u_j(v_j^1 + v_j^2)}{\xi}$

geben dann beziehungsweise die Steigungen der Sehnen zwischen den Stützpunkten von u_j an.

Dabei ist anzumerken, daß wegen $p > r > s$ im Optimum gilt:

$y_j^2(t) > 0 \Longrightarrow y_j^1(t) = v_j^1$ und

$y_j^3(t) > 0 \Longrightarrow y_j^2(t) = v_j^2$:



Vergegenwärtigt man sich nun noch, daß (LPUH) ein Minimierungsproblem ist, so erhält man folgende Daten für das zu lösende lineare Programm mit unendlichem Horizont:

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ -K & I & I & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ -r \\ -s \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $x(t)$ besteht aus den Teilvektoren $\tilde{x}(t)$, $y^1(t)$, $y^2(t)$, $y^3(t)$.

Man erkennt, daß die Voraussetzung (4.6.2.2) von Seite 113 erfüllt ist und daß daher die Lösung des dort betrachteten linearen Komplementärproblems $LK(M,q)$ (bzw. des Problems $LK(\bar{M},q)$) einer Lösung unseres Problems entspricht.
Um die erfolgreiche Anwendbarkeit des Algorithmus' von Lemke garantieren zu können, ist es nun noch erforderlich, die Gültigkeit der Voraussetzungen des Korollars (4.6.2.5) zu verifizieren.

Die Bedingung $\{ x \geq 0 \mid (H+C)\cdot x \leq f \} \neq \emptyset$ ist offenbar stets erfüllt, wenn wir die Nichtnegativität des Ressourcenvektors b voraussetzen; dies erscheint unbedenklich (Hansen und Koopmans verlangen sogar $b > 0$; vgl. [42], S. 490) .
Die Bedingung $\{ u \geq 0 \mid -H^T \cdot u \leq c \} \neq \emptyset$ ist wegen $H = G-F$ äquivalent mit der Existenz nichtnegativer Vektoren u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 , die das folgende Ungleichungssystem lösen:

$$(A-B)^T \cdot u^1 + V^T \cdot u^2 - K^T \cdot u^3 \geq 0$$
$$u^3 + u^4 \geq q$$
$$u^3 + u^5 \geq r$$
$$u^3 \geq s \quad .$$

Eine Lösung dieses Systems ist jedoch rasch bestimmt:
man setze $u^1 = 0$, $u^4 = u^5 = 0$ und $u^3 = q$;
wegen $q > r > s$ sind die drei letzten Ungleichungen
bereits erfüllt, und wegen $V^T \cdot e > 0$ (vgl. Annahme (4.6.1.1)
auf S. 110) läßt sich u^2 so wählen, daß auch die erste
Restriktion erfüllt ist.

4.7 Weitere Gleichgewichtsmodelle

4.7.1 Eine Verallgemeinerung des Modells von Mathiesen

Man betrachte eine Volkswirtschaft mit m Gütern und n Produktionsprozessen. Die Technologie sei vom von Neumann-schen Typ und durch die m×n-Matrizen A (input) und B (output) gegeben.

Wir interessieren uns nun für das Geschehen in einer Periode. $x \geq 0$ bezeichne den n-Vektor der Intensitäten, mit denen die Produktionsprozesse in dieser Periode betrieben werden, y^1 den m-Vektor der Marktpreise zu Beginn der Periode und y^2 den m-Vektor der Marktpreise am Ende der Periode. Weitere Daten sind die m-Vektoren b und d, welche die Ressourcen zu Beginn der Periode bzw. die Nachfrage am Ende der Periode darstellen. Schließlich gibt der n-Vektor c die Produktionskosten an, die anfallen, wenn die Prozesse mit der Einheitsintensität betrieben werden. Ein Marktgleichgewicht dieser Volkswirtschaft (bezüglich einer Periode) ist durch drei nichtnegative Vektoren $\hat{x}$, $\hat{y}^1$, $\hat{y}^2$ gegeben, die den folgenden Bedingungen genügen (vgl. Mathiesen [69], S. 5):

a) Die Ressourcen werden nicht überschritten

$$w^3 := b - A \cdot x \geq 0$$

b) Die Nachfrage wird befriedigt

$$w^2 := B \cdot x - d \geq 0$$

c) Kein Prozeß erwirtschaftet einen Gewinn

$$w^1 := A^T \cdot y^1 - B^T \cdot y^2 + c \geq 0$$

d) Verlustbringende Prozesse sind inaktiv

$$(w^1)^T \cdot x = 0$$

e) Der Preis eines Faktors, dessen Ressourcen nicht ausgeschöpft werden, ist gleich Null

$$(w^2)^T \cdot y^1 = 0$$

f) Der Preis eines im Überschuß produzierten Gutes ist gleich Null

$$(w^3)^T \cdot y^2 = 0 \quad .$$

Setzt man $w := \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix}$, $z := \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y^2 \\ y^1 \end{Bmatrix}$

und $M := \begin{Bmatrix} 0 & -B^T & A^T \\ B & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{Bmatrix}$, $q := \begin{Bmatrix} c \\ -d \\ b \end{Bmatrix}$,

so erscheint das Problem der Bestimmung eines Marktgleichgewichts als lineares Komplementärproblem LK(M,q). Lemkes Algorithmus verarbeitet dieses Problem, da die Matrix M offensichtlich positiv semidefinit ist. Eine äquivalente Möglichkeit wäre die Lösung des linearen Programms (vgl. Abschnitt 4.1) :

$$\text{minimiere } c^T \cdot x$$

$$\text{über } \{ x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b, \quad B \cdot x \geq d \}.$$

Im Gleichgewicht sind also die Produktionskosten unter den Nebenbedingungen a) und b) minimal.

Mathiesen [69] gab eine interessante Verallgemeinerung dieses Modells, indem er den konstanten Nachfragevektor d durch die Preis-Absatz-Funktion $d(y^2) = d + D \cdot y^2$ ersetzte. Das veränderte Problem ist nun nicht mehr als lineares Programm lösbar, da das primale Programm auch den Vektor der Dualvariablen y^2 enthält. Die Formulierung als lineares Komplementärproblem bietet hingegen keinerlei Schwierigkeiten: man ersetze einfach die Matrix M durch

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} 0 & -B^T & A^T \\ B & -D & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist -D positiv semidefinit, so ist auch $\bar{M}$ positiv semidefinit und daher wird $LK(\bar{M},q)$ von Lemkes Algorithmus verarbeitet. Darauf wies bereits Mathiesen ([69], S. 6-7) hin.

Wir wollen hier zeigen, daß bei einer leichten Modifikation der Voraussetzungen über D von der Annahme konstanter Produktionskosten pro Stück abgegangen werden kann. Dazu ersetzen wir c in der Bedingung c) durch $c + C \cdot x$, d.h. wir gehen davon aus, daß die Stückkosten der Produk-

tion (näherungsweise) linear in den Intensitäten der Produktionsprozesse sind. Man erhält das lineare Komplementärproblem $LK(\hat{M},q)$ mit

$$\hat{M} := \begin{pmatrix} C & -B^T & A^T \\ B & -D & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Über die Matrix D setzen wir voraus:

(4.7.1.1) Annahme: Entweder ist $D = 0$ und die Menge $S := \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b , \quad B \cdot x \geq d\} \neq \emptyset$, oder aber $-D$ ist positiv semidefinit und es existiert ein Vektor $\bar{y} \geq 0$ so, daß $(D + D^T) \cdot \bar{y} < 0$ erfüllt ist.

Die Annahme (4.7.1.1) ist in vielen ökonomisch bedeutungsvollen Fällen erfüllt. Nimmt man z.B. an, daß gilt:

1. $D_{ii} < 0$ für alle i, d.h. die Nachfrage nach Gut i sinkt mit steigendem Preis von Gut i,

2. $D_{ij} \geq 0$ für alle $j \neq i$, d.h. die Nachfrage nach Gut i sinkt nicht, wenn der Preis von Gut j steigt,

3. $D_{ii} + \sum_{j \neq i} D_{ji} < 0$ für alle i, d.h. Preisänderungen des Gutes i betreffen die Nachfrage nach diesem Gut erheblich stärker als die nach anderen Gütern

und schließlich noch

4. $D_{ii} + \sum_{j \neq i} D_{ij} < 0$ für alle i, d.h. die Nachfrage nach Gut i hängt weit stärker von der Preisgestaltung des Gutes i ab als von der anderer Güter,

so ist $F := -(D+D^T)$ eine Leontief-Matrix und hat positive Hauptminoren (vgl. Dorfman et al. [20], S. 256). Wegen der Symmetrie von F ist diese Matrix sogar positiv definit (vgl. Cottle-Dantzig [10], S. 117). Offensichtlich ist dann auch -D positiv definit, erst recht positiv semidefinit. Ferner erfüllt $\bar{y} = e$ die Bedingung $(D+D^T) \cdot \bar{y} < 0$; die Annahme (4.7.1.1) trifft also zu.

Im Falle $D = 0$ bedeutet die Forderung $S \neq \emptyset$ nur, daß ein Intensitätenvektor x existiert, dessen Einsatz die vorhandenen Ressourcen nicht überfordert und zudem einen output verschafft, mit dem die Nachfrage befriedigt werden kann.

Außerdem treffen wir die (ökonomisch unbedenkliche)

(4.7.1.2) Annahme: Die Inputmengen der Produktionsprozesse sowie der Ressoucenvektor sind nichtnegativ; jeder Prozeß benötigt mindestens einen Inputfaktor:

$$b \geq 0 , \quad A \geq 0 , \quad e^T \cdot A > 0 .$$

(4.7.1.3) Satz: Unter den Annahmen (4.7.1.1) und (4.7.1.2) gibt es Komplementärpivot-Algorithmen, die eine Lösung von $LK(\hat{M},q)$ bestimmen.

Beweis: Wir untersuchen zuerst den Fall $D = 0$.
Aufgrund der Annahme (4.7.1.2) ist das Polyeder $\{ x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b \}$ beschränkt und daher erst recht das Polyeder $S = \{x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b, B \cdot x \geq d\}$. Identifiziert man R mit C, so erkennt man mit Satz (3.2.1) (siehe S. 39), daß der im Beweis dieses Satzes angegebene Komplementärpivot-Algorithmus das Problem $LK(\hat{M},q)$ verarbeitet. Wegen $S \neq \emptyset$ und $A^T \cdot e > 0$ ist $LK(\hat{M},q)$ zulässig; der betrachtete Algorithmus bricht also stets mit einer komplementären Lösung ab.

Ist $-D$ positiv semidefinit und $(D+D^T) \cdot \bar{y} < 0$ für ein $\bar{y} \geq 0$, so läßt sich eine Lösung von $LK(\hat{M},q)$ mit dem Algorithmus von Eaves [23] bestimmen. Identifiziert man R mit $\begin{pmatrix} C & -B^T \\ B & -D \end{pmatrix}$, so erkennt man mit Satz (3.2.3) (vgl. S. 43), daß dieser Algorithmus genau dann eine Lösung von $LK(\hat{M},q)$ bestimmt, wenn die Funktion

$$f(x,y) = x^T \cdot C \cdot x + c^T \cdot x - y^T \cdot D \cdot y - d^T \cdot y$$

über der Menge

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; A \cdot x \leq b \right\}$$

nach unten beschränkt ist.

Nun ist $\{ x \geq 0 \mid A \cdot x \leq b \}$ aufgrund der Annahme (4.7.1.2) beschränkt; daher existiert eine reelle Zahl G^1 mit $x^T \cdot C \cdot x + c^T \cdot x \geq G^1$ für $\binom{x}{y} \in Q$. Aufgrund der Annahme (4.7.1.1) existiert ein Vektor $\bar{y} \geq 0$ mit der Eigenschaft $(D+D^T) \cdot \bar{y} < 0$. Für ein geeignetes Vielfaches $\hat{y}$ von $\bar{y}$ gilt dann $-d \geq (D+D^T) \cdot \hat{y}$. Somit erhält man die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\geq G^1 - y^T \cdot D \cdot y - d^T \cdot y \\
&\geq G^1 - y^T \cdot D \cdot y + (D+D^T) \cdot \hat{y} \\
&= G^1 + \hat{y}^T \cdot D \cdot \hat{y} - (y-\hat{y})^T \cdot D \cdot (y-\hat{y}) \\
&\geq G^1 + \hat{y}^T \cdot D \cdot \hat{y} \\
&> -\infty \qquad \text{für alle } \binom{x}{y} \in Q .
\end{aligned}
$$

Δ

4.7.2 Die Bestimmung eines Tauschgleichgewichts bei linearen Nutzenfunktionen

Wir betrachten das Modell eines Marktes, auf dem n Personen m Güter austauschen. Die Situation auf diesem Markt wird durch zwei m×n-Matrizen A und U näher beschrieben: die stochastische† Matrix A gibt Aufschluß über

---

† Eine Matrix A heißt stochastisch, wenn $A \geq 0$ und $A \cdot e = e$ gilt.

die ursprüngliche Aufteilung der m Güter und zwar bezeichnet das Matrixelement A_{ij} den Anteil am Gesamtvorkommen des Gutes i, den die Person j besitzt. Dabei wird angenommen, daß jeder Marktteilnehmer zumindest einen geringen Anteil eines der m Güter besitzt: $e^T \cdot A > 0$.
Die Matrix U charakterisiert die Nutzenvorstellungen der Marktteilnehmer: besitzt die Person j einen Anteil X_{ij} am Gesamtvorkommen von Gut i, so zieht sie daraus den Nutzen $U_{ij} \cdot X_{ij}$. Gesucht wird nun eine m×n-Matrix X sowie ein m-Vektor y von Preisen, die zusammen ein Gleichgewicht der Tauschwirtschaft bilden.

(4.7.2.1) Definition: Ein Gleichgewicht des betrachteten Marktes ist durch einen Preisvektor $0 \neq \hat{y} \geq 0$ und eine m×n-Matrix $\hat{X}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(a) Für $j=1,\cdot\cdot,n$ maximiert $\hat{X}_{\cdot j}$ die Funktion $(U_{\cdot j})^T \cdot X_{\cdot j}$ über der Menge $\{ X_{\cdot j} \geq 0 \mid \hat{y}^T \cdot X_{\cdot j} \leq \hat{y}^T \cdot A_{\cdot j} \}$,

(b) $\hat{X}$ ist eine substochastische† Matrix.

Die Eigenschaft (a) besagt, daß bei Gültigkeit des Preisvektors $\hat{y}$ der Vektor $\hat{X}_{\cdot j}$ dasjenige Güterbündel repräsen-

---

† Eine Matrix A heißt substochastisch, wenn $A \geq 0$ und $A \cdot e \leq e$ gilt.

tiert, das dem Marktteilnehmer j unter den von ihm finanzierbaren Güterbündeln den größten Nutzen erbringt.
Die Restriktion (b) berücksichtigt, daß nach dem Austausch nicht mehr Güter vorhanden sein können als vor dem Tausch.

Mit Tauschgleichgewichten dieser Art hat sich auch Gale ([34], Kap. 8) beschäftigt. Er benutzte den Begriff der "Reduzierbarkeit" (vgl. Gale [34], S. 266) zur weiteren Charakterisierung von Tauschwirtschaften:

(4.7.2.2) Definition: Das betrachtete Modell heißt reduzierbar, wenn eine echte Teilmenge von Marktteilnehmern $\alpha \subset \{1,\cdots,n\}$ existiert, die das Gesamtvorkommen einer Gruppe von Gütern $\beta \subset \{1,\cdots,m\}$ besitzen, und wenn keine Person $j \in \alpha$ ein Gut $i \in \gamma := \{1,\cdots,m\} \setminus \beta$ begehrt:

$$A_{\beta\alpha} \cdot e = e \quad \text{und} \quad U_{\gamma\alpha} = 0 \ .$$

Ist ein lineares Tauschmodell reduzierbar, so läßt sich das Gleichgewicht des Gesamtmodells aus den Gleichgewichten der nicht reduzierbaren Teilmodelle zusammensetzen (vgl. Gale [34], S. 271). Für die Bestimmung eines Gleichgewichts des Gesamtmodells wäre also ein Verfahren zu entwickeln, das für nichtreduzierbare Modelle ein Gleichgewicht bestimmt und für reduzierbare Modelle eine geeignete Reduktion angibt. Dies gelang Eaves [27].

Eaves betrachtet das lineare Komplementärproblem LK(M,q) mit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A^T & E \\ 0 & I_m & -F \\ -V & F^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} -A^T \cdot e_m \\ e_m \\ e_{n \cdot m} \end{pmatrix},$$

wobei $E = \begin{pmatrix} e_m^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_m^T & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_m^T \end{pmatrix}$ eine $(n \times n \cdot m)$-Matrix ist,

$$V = \begin{pmatrix} U_{\cdot 1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_{\cdot 2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{\cdot n} \end{pmatrix}$$ eine $(n \cdot m \times n)$-Matrix

und $F = (I_m \; I_m \; \cdots\cdots \; I_m)$ eine $(m \times n \cdot m)$-Matrix.

Die $(n+m+n \cdot m)$-Vektoren w und z werden entsprechend in Teilvektoren w^i, z^i $(i=1,2,\cdot\cdot,n+2)$ zerlegt, wobei

z^1, w^1 n-Vektoren sind und

z^2, z^3, z^4, $\cdots$, z^{n+2}, w^2, w^3, $\cdot\cdot$, w^{n+2} m-Vektoren.

Der nachfolgende Satz stellt die Beziehung zwischen dem Problem LK(M,q) und den Tauschgleichgewichten des erörterten Modells her. Zum Beweis sei auf die Arbeit von Eaves ([27], S. 3-5) verwiesen.

(4.7.2.3) Satz: Sei $a := \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{n+m+n\cdot m}$

Bricht Lemkes Algorithmus, angewandt auf das Problem LK(M,q,a), in einer komplementären Lösung $(\hat{z}^2)$ ab, so ist ein Gleichgewicht des betrachteten Modells gegeben durch

$$\hat{y} = \hat{z}^2 + e_m \,, \qquad \hat{X}_{ij} = \frac{\hat{z}_i^{2+j}}{1+\hat{z}_i^2} \qquad i=1,\cdot\cdot,m;\ j=1,\cdot\cdot,n.$$

Bricht Lemkes Algorithmus in einer unbeschränkten F-Facette mit der Richtung $(\bar{w}^T, \bar{z}^T, \bar{z}_o^T)^T$ ab, so ist durch

$$\alpha := \{\, j \in \{1,\cdot\cdot,n\} \mid \bar{z}_j^1 > 0 \,\},$$

$$\beta := \{\, i \in \{1,\cdot\cdot,m\} \mid \bar{z}_i^2 > 0 \,\}$$

eine Reduktion des Modells gegeben.

5. Das Problem der Ermittlung mehrerer Lösungen

Für einige Optimierungsprobleme ist es von Interesse, nicht nur eine, sondern möglichst alle Lösungen des zugehörigen linearen Komplementärproblems LK(M,q) zu kennen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Lösungen von LK(M,q) nur notwendige Optimalitätskriterien erfüllen bzw. lokale Optima darstellen. Könnte man "effizient" alle Lösungen von LK(M,q) bestimmen, so wäre es unproblematisch, unter diesen das globale Optimum herauszufinden.
Probleme dieser Art treten zum Beispiel bei quadratischen Programmen und bei Bimatrixspielen auf. In den folgenden beiden Abschnitten werden Lösungsansätze diskutiert.

5.1 Die Bestimmung von Kuhn-Tucker-Punkten quadratischer Programme

Im Abschnitt 4.1 wurde das Problem, einen Kuhn-Tucker-Punkt des quadratischen Programms (QP) zu finden, als lineares Komplementärproblem formuliert. Außerdem wurde darauf hingewiesen (siehe S. 47), daß der Algorithmus von

Eaves ermittelt, ob eine (endliche) optimale Lösung existiert und gegebenenfalls einen Kuhn-Tucker-Punkt von (QP) bestimmt. Ließe sich durch eine Modifikation dieses Verfahrens die Menge aller Kuhn-Tucker-Punkte "effizient" bestimmen, so könnte man daraus auch leicht (durch Einsetzen in die Zielfunktion) das globale Optimum ermitteln.

W.C. Mylander [74] hat eine Modifikation von Lemkes Algorithmus vorgeschlagen, mit der mehrere Kuhn-Tucker-Punkte bestimmt werden können. Es war ihm allerdings nicht möglich, die Klasse der Probleme genau zu umgrenzen, für die sein Algorithmus stets alle komplementären Lösungen von LK(M,q) ermittelt.

Wir wollen uns hier ein wenig ausführlicher mit einem 1973 von Hansen und Mathiesen [44] veröffentlichten Algorithmus zur Berechnung mehrerer Lösungen von LK(M,q) beschäftigen. Auch diese Autoren konnten zwar die Klasse der Probleme nicht eingrenzen, für die ihr Algorithmus alle Lösungen bestimmt. Es liegen jedoch ermutigende Rechenergebnisse mit Daten quadratischer Programme (QP) vor, bei denen in 55 von 56 Testbeispielen sämtliche Lösungen gefunden wurden; darunter befinden sich auch solche Beispiele, bei denen Mylanders Algorithmus versagt (vgl. Hansen-Mathiesen [44], S. 10 und S. 8).

Dem Algorithmus von Hansen und Mathiesen liegt die Überlegung zugrunde, daß sich fastkomplementäre Pfade außer in den Endpunkten unbeschränkter F-Facetten auch in komplementären Punkten initiieren lassen, ohne daß die Gefahr besteht, zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Für einen beliebig vorgegebenen Index $j \in \{1,2,\cdot\cdot,k\}$ liegt nämlich ein komplementärer Punkt $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ in genau einer F-Facette dieser Klasse j (vgl. Lemma (2.2.6)).

In $\begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$ lassen sich also k F-Pfade initiieren, und jeder dieser Pfade führt entweder zu einer unbeschränkten F-Facette oder zu einer komplementären Lösung $\begin{pmatrix}\bar{w}\\ \bar{z}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$. Im letzteren Falle wiederholt man die gleiche Vorgehensweise ausgehend von dem Punkt $\begin{pmatrix}\bar{w}\\ \bar{z}\end{pmatrix}$. Dabei achtet man durch eine geeignete Markierung der gefundenen komplementären Lösungen darauf, daß keiner der Pfade mehrfach durchlaufen wird.

Der im folgenden skizzierte Algorithmus ist offenbar nicht nur für die Bestimmung von Kuhn-Tucker-Punkten geeignet, sondern auch zur Berechnung mehrerer Lösungen anderer linearer Komplementärprobleme LK(M,q). Vorausgesetzt wird nur die Existenz eines Komplementärpivot-Algorithmus', der mindestens eine komplementäre Lösung bestimmt, falls es eine gibt.

(5.1.1) Der Hansen-Mathiesen-Algorithmus

Voraussetzung : Gegeben sei ein lineares Komplementärproblem LK(M,q), dessen Daten (M,q) die Nichtentartungsannahme (2.2.1) erfüllen. Ferner sei ein Algorithmus bekannt, der mindestens eine komplementäre Lösung von LK(M,q) bestimmt, falls es eine gibt.

Schritt 0: Man setze $H := \emptyset$.

Schritt 1: Man stelle fest, ob das gegebene Problem LK(M,q) eine komplementäre Lösung besitzt. Wenn ja, dann bestimme man eine solche Lösung $\hat{t} = \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ und setze $H := H \cup \{\hat{t}\}$.

Schritt 2: Gilt $H = \emptyset$, so STOP .
Andernfalls wähle man ein Element $t \in H$.
Für $j=1,\cdots,k$ initiiere man einen F-Pfad der Klasse j in t, falls t nicht mit j markiert ist (rechnerisch durch einen Pivotschritt auf der Nichtbasisvariablen des Paares (w_j, z_j) im Tableau von t) .
Führt der Pfad zu einer komplementären Lösung $\bar{t}$, so prüfe man, ob $\bar{t} \notin H$ gilt und setze ggf. $H := H \cup \{\bar{t}\}$; man markiere $\bar{t} \in H$ mit j.

Schritt 3: Man übertrage die komplementäre Lösung t in den Ausgabebereich und setze $H := H \setminus \{t\}$.
Man kehre zu Schritt 2 zurück.

Ein Beispiel, für das der Hansen-Mathiesen-Algorithmus nicht alle komplementären Lösungen bestimmt, wird im Abschnitt 5.2 gegeben. Die Klasse derartiger Probleme läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

(5.1.2) Lemma: Sei $\hat{t}$ die komplementäre Lösung eines linearen Komplementärproblems LK(M,q), die im Schritt 1 des Hansen-Mathiesen-Algorithmus' gefunden wurde. Der Algorithmus bestimmt genau dann nicht die Menge K aller komplementären Lösungen von LK(M,q), wenn eine nicht leere Menge $D \subset K \setminus \{\hat{t}\}$ mit der Eigenschaft existiert, daß jeder F-Pfad, der in einem Punkt $t^1 \in D$ initiiert wird, in einem Punkt $t^2 \in D$ oder in einer unbeschränkten F-Facette abbricht.

Die Behauptung ist offensichtlich richtig.

(5.1.3) Bemerkung: Für einige lineare Komplementärprobleme ist die Menge der unbeschränkten F-Facetten von vornherein bekannt (vgl. z.B. Abschnitt 4.3.1). Lemma (5.1.2) legt nahe, in solchen Fällen den Schritt 1 des Algorithmus' (5.1.1) zu modifizieren: Statt nur eine komplementäre Lösung zu bestimmen, initiiert man F-Pfade in jeder unbeschränkten F-Facette.

5.2 Die Methode der Rhombenpfade zur Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in Bimatrixspielen

Das Problem der Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in Bimatrixspielen wurde im Abschnitt 4.3.1 als lineares Komplementärproblem LK(M,q) mit $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$, $A > O$, $B > O$, $q = -e_k$ formuliert. Dort wurde auch ein Algorithmus angegeben, der eine Lösung von LK(M,q) bestimmt.
Hat ein Bimatrixspiel mehrere Paare von Gleichgewichtsstrategien, so ist es bekanntlich problematisch, einen beliebigen dieser Punkte als Lösung des Spiels anzusehen. Im Spiel $\Gamma(A,B)$ mit $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ sind zum Beispiel $(\bar{p},\bar{q}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ und $(\bar{\bar{p}},\bar{\bar{q}}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ Paare von Gleichgewichtsstrategien. Während $(\bar{p},\bar{q})$ beiden Spielern den Verlust einer Einheit bringt, ist $(\bar{\bar{p}},\bar{\bar{q}})$ offensichtlich ungünstiger, denn dieses Strategienpaar bringt beiden Spielern den Verlust von zwei Einheiten.

Es wäre deshalb vorteilhaft, die Menge aller Paare von Gleichgewichtsstrategien zu kennen, um daraus dann ein geeignetes Paar als Lösung des Spiels zu wählen.
Man weiß, daß das Polyeder $P = \{\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \geq O \mid w = M \cdot z - e_k\}$ genau k unbeschränkte F-Facetten besitzt (vgl. S. 64). Eine naheliegende Vermutung ist, daß man alle Lösungen von LK(M,q) dadurch erhält, daß man iterativ den Algorithmus von Abschnitt 4.3.1 in jeder dieser unbeschränkten F-Facetten initiiert. Leider ist dies nicht der Fall,

wie Aggarwal [1] durch Angabe eines Gegenbeispiels zeigte. Tatsächlich erhält man auf diese Weise nur dann alle Gleichgewichtspunkte, wenn es nur einen gibt. Dies ist eine direkte Folge der Indextheorie von Lloyd Shapley [88]. Shapley assoziiert dort mit jeder komplementären Lösung einen Index +1 bzw. -1 und zeigt folgendes: zum einen gibt es mit dem Index -1 genau eine komplementäre Lösung mehr als mit dem Index +1; zum andern führt der Algorithmus von Abschnitt 4.5.1 stets zu einer komplementären Lösung mit dem Index -1.

Erheblich mehr Gleichgewichtspunkte lassen sich mit dem Algorithmus von Hansen und Mathiesen bestimmen. Der Verfasser [5] berichtete an anderer Stelle über Rechenerfahrungen mit der in Bemerkung (5.1.3) erläuterten Modifikation des Algorithmus' (5.1.1); danach lassen sich auf diese Weise etwa zwei- bis dreimal so viele Gleichgewichtspunkte auffinden, als wenn man nur den Algorithmus von Abschnitt 4.3.1 iterativ in jeder unbeschränkten F-Facette initiiert.
Das Lemma (5.1.2) konkretisiert sich für das hier betrachtete Problem zu:

(5.2.1) Lemma: Sei $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$, $q = -e_k$.

Der gemäß Bemerkung (5.1.3) modifizierte Hansen-Mathiesen-Algorithmus bestimmt genau dann nicht die Menge K aller komplementären Lösungen von

LK(M,q), wenn eine nichtleere Menge $D \subset K$ mit der Eigenschaft existiert, daß jeder F-Pfad, der in einem Punkt $t^1 \in D$ initiiert wird, zu einem Punkt $t^2 \in D$ führt.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Menge D gegebenenfalls eine gerade Anzahl von Elementen enthält. Dazu betrachte man alle fastkomplementären Pfade einer festen Klasse j, die zwischen Punkten in D verlaufen, und man erinnere, daß in jeder komplementären Lösung genau ein F-Pfad der Klasse j entspringt (vgl. Lemma (2.2.6)). Da das Spiel $\Gamma(A,B)$ bekanntlich eine ungerade Anzahl von Gleichgewichtspunkten besitzt (vgl. z.B. Lemke und Howson [60], S.420) , folgt:

(5.2.2) Lemma: Der modifizierte Hansen-Mathiesen-Algorithmus bestimmt eine ungerade Anzahl von Lösungen des Problems LK(M,q) mit $M=\begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$, $q=-e_k$.

Tatsächlich gibt es Bimatrixspiele, für die der Hansen-Mathiesen-Algorithmus nicht alle Gleichgewichtspunkte bestimmt. In einem Testbeispiel, dessen Daten umseitig aufgeführt sind, fand der Algorithmus im (modifizierten) Schritt 1 fünf Gleichgewichtspunkte; acht weitere wurden im Schritt 2 ermittelt. Außerdem existieren jedoch noch zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich $(\hat{p},\hat{q})$ und $(\bar{p},\bar{q})$ mit:

GLEICHGEWICHTSPUNKTE IN BIMATRIXSPIELEN (SALNIMI: BEISPIEL 65

AUSZAHLUNGSMATRIX VON SPIELER 1:

79.249	30.000	23.000	42.807	89.053	46.295	40.961	49.910	46.776	87.909	19.024
10.905	16.049	65.025	24.926	59.242	6.529	73.982	80.975	84.155	48.169	36.630
66.808	74.005	32.551	21.997	1.893	16.924	42.372	70.387	30.706	68.033	33.809
91.057	24.121	45.519	37.337	25.279	14.874	56.107	37.273	78.850	11.012	60.774
93.637	79.062	75.775	07.306	2.335	12.537	40.349	76.461	56.979	56.319	50.340
32.261	92.391	65.451	47.316	22.978	22.511	72.058	54.594	79.194	15.041	9.119
8.039	13.967	86.181	13.077	90.496	56.700	84.295	51.358	82.606	63.549	41.170
59.147	6.879	29.749	71.785	30.971	95.125	94.983	27.380	83.582	5.015	97.490
82.027	91.090	20.150	91.229	19.986	12.094	95.375	36.881	98.705	21.229	8.271
39.651	5.059	90.959	20.700	39.121	70.982	56.319	98.060	19.626	60.216	91.101
15.330	88.897	66.260	36.158	36.066	72.949	46.911	5.889	28.195	46.948	10.502
91.802	2.280	25.051	86.867	73.292	3.678	61.946	21.316	70.004	29.211	83.027
88.069	29.098	93.175	23.630	33.781	20.324	32.908	92.477	28.985	20.700	54.232

AUSZAHLUNGSMATRIX VON SPIELER 2:

3.907	20.035	79.078	98.702	66.004	56.754	39.130	69.904	51.061	89.250	57.379
51.687	17.978	97.093	98.209	20.865	35.927	67.263	97.613	22.042	71.708	53.978
61.322	65.924	15.310	9.571	39.104	2.271	88.155	87.827	53.970	98.705	55.280
50.275	63.808	17.328	99.512	92.753	91.076	2.892	91.001	89.096	86.013	7.372
53.095	95.024	33.033	33.310	23.753	86.965	39.954	85.030	90.304	30.179	90.611
17.518	52.096	70.003	03.830	39.955	99.209	50.232	50.092	61.007	89.770	87.033
35.630	39.998	9.954	32.311	9.310	57.340	52.008	61.255	97.554	75.929	86.077
38.192	30.130	2.923	67.037	82.073	29.273	79.728	10.700	50.071	31.197	87.091
33.719	50.090	90.539	57.031	59.067	15.832	7.900	9.928	76.575	85.257	80.599
89.593	99.032	97.091	50.315	98.595	19.993	83.333	84.051	97.015	50.169	9.998
80.278	29.596	91.035	17.528	96.058	89.775	59.709	98.202	87.818	92.099	10.795
88.723	98.075	91.337	95.335	18.898	39.302	29.996	85.093	90.703	89.237	73.559
90.861	58.318	93.305	21.391	82.532	17.326	59.759	81.348	50.696	8.539	90.567

Testbeispiel: Für das durch die beiden oben ausgedruckten Matrizen A und B gegebene Bimatrixspiel bestimmt der Hansen-Mathiesen Algorithmus nur 13 von 15 Gleichgewichtspunkten.

$\hat{p}^T = (0, 0, 0, 0, 0, .477, 0, 0, 0, 0, .252, .150, .122)$,

$\hat{q}^T = (.324, .064, 0, 0, 0, 0, .233, 0, 0, .379, 0)$,

$\bar{p}^T = (0, .015, 0, 0, 0, .471, 0, 0, 0, 0, .234, .151, .129)$,

$\bar{q}^T = (.325, .042, 0, 0, 0, .048, .261, 0, 0, .323, 0)$;

die beiden zugehörigen komplementären Lösungen von LK(M,q) sind untereinander durch $m+n = 24$ fastkomplementäre Pfade verbunden und sind daher für den Hansen-Mathiesen-Algorithmus unzugänglich. $(\hat{p},\hat{q})$ und $(\bar{p},\bar{q})$ wurden mit einem Komplementärpivot-Algorithmus aufgespürt, den der Verfasser [4],[5] im Jahre 1974 vorgeschlagen hat.
Diese "Methode der Rhombenpfade" überträgt das Verfahren von Lemke und Howson auf das Durchlaufen gewisser zweidimensionaler Facetten des Polyeders $P = \{\binom{w}{z} \geq 0 \mid w = M \cdot z + q\}$, was hier durch die spezielle Struktur der Matrix M möglich wird.

Zunächst erörtern wir einige Annahmen, Definitionen und Sätze, mit Hilfe derer dann später Aussagen über die Endlichkeit der "Methode der Rhombenpfade" getroffen werden. Es ist nützlich, sich dabei die Analogie der Argumentationsweise zu der des Abschnitts 2.2 zu vergegenwärtigen.

Wir gehen davon aus, daß M die Gestalt $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ hat, wobei $A > 0$, $B > 0$ $m \times n$-Matrizen sind; zur Abkürzung setzen wir noch : $k = m+n$, $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{m+1, \ldots, k\}$.

Die k-Vektoren w und z unterteilen wir in $w = \binom{w^1}{w^2}$, $z = \binom{z^1}{z^2}$, wobei w^1 und z^1 m-Vektoren sind.

(5.2.3) Definition: Eine Lösung $\binom{\hat{w}}{\hat{z}} \geq 0$ des Systems $w = M \cdot z - e_k$ heißt eine fast fastkomplementäre Lösung der Klasse (σ,τ), wenn $\binom{\hat{w}^1}{\hat{z}^2}$ höchstens m+1 und $\binom{\hat{z}^1}{\hat{w}^2}$ höchstens n+1 positive Komponenten besitzen und wenn gilt:

$$\hat{w}^T \cdot \hat{z} = \hat{w}_\sigma \cdot \hat{z}_\sigma + \hat{w}_\tau \cdot \hat{z}_\tau , \qquad \sigma \in I , \quad \tau \in J ,$$

$$\hat{w}_\sigma \cdot \hat{z}_\sigma \cdot \hat{w}_\tau \cdot \hat{z}_\tau > 0 .$$

Die Nichtentartungsannahme (2.2.1) verschärfen wir zu:

(5.2.4) Annahme: Jede komplementäre, jede fastkomplementäre und jede fast fastkomplementäre zulässige Basislösung des Systems $w = M \cdot z - e_k$ ist nichtentartet.

(5.2.5) Definition: Eine FF-Facette der Klasse (σ,τ) ist eine zweidimensionale Facette des Polyeders

$$P = \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; w = M \cdot z - e_k \right\} ,$$

deren relatives Innere einen fast fastkomplementären Punkt der Klasse (σ,τ) enthält.

Jede fast fastkomplementäre Lösung $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ hat höchstens k+2 positive Komponenten; liegt $\binom{\hat{w}}{\hat{z}}$ im relativen Inneren einer FF-Facette $\hat{F}$, so hat dieser Punkt genau k+2

positive Komponenten. Man überlegt sich nun leicht, daß alle Punkte im relativen Inneren von $\hat{F}$ der gleichen Klasse (σ,τ) angehören wie $(\hat{\underline{c}})$. Die Punkte des relativen Randes von $\hat{F}$ sind entweder fast fastkomplementär der Klasse (σ,τ), fastkomplementär der Klasse σ, fastkomplementär der Klasse τ, oder aber komplementär (vgl. Bastian [4], S. 18).

Geometrisch betrachtet ist eine FF-Facette $\hat{F}$ das Kreuzprodukt $\hat{F}_A \times \hat{F}_B$ zweier Kanten der Polyeder

$$P_A = \left\{ \begin{pmatrix} w^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; w^1 = A \cdot z^2 - e_m \right\}$$

und $$P_B = \left\{ \begin{pmatrix} w^2 \\ z^1 \end{pmatrix} \geq 0 \;\middle|\; w^2 = B^T \cdot z^1 - e_n \right\} .$$

Daraus ergibt sich unmittelbar (vgl. Bastian [4], S. 18):

(5.2.6) Lemma: Jede beschränkte FF-Facette des Polyeders P hat genau vier Extrempunkte.

Unter den unbeschränkten FF-Facetten sind FF-Kegel von besonderem Interesse:

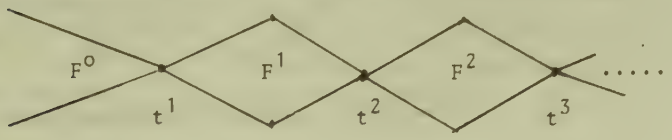
(5.2.7) Definition: Ein FF-Kegel ist eine FF-Facette $F = F_A \times F_B$ des Polyeders P mit der Eigenschaft, daß F_A eine unbeschränkte Kante von P_A und F_B eine unbeschränkte Kante von P_B ist.

Erfreulicherweise besitzt das Lemma (2.2.5) (vgl. S. 17) ein Analogon für FF-Facetten:

(5.2.8) Satz: Jeder fast fastkomplementäre Extrempunkt des Polyeders P liegt in genau zwei FF-Facetten.

Zum Beweis sei auf Bastian ([4], S. 8) verwiesen.

Wir betrachten nun eine Folge von FF-Facetten, die an gegenüberliegenden Extrempunkten zusammenhängen:



(5.2.9) Definition: Bezeichne C die Menge aller fast fastkomplementären, fastkomplementären oder komplementären Extrempunkte des Polyeders P.
Ein Rhombenpfad ist eine alternierende Folge $t^1, F^1, t^2, F^2, \cdots$ von Extrempunkten $t^i \in C$ und von FF-Facetten F^i auf dem Polyeder P mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $t^i \in F^i$ $(i=1,2,\cdots)$

(ii) $t^{i+1} \in F^i$ $(i=1,2,\cdots)$

(iii) $\begin{pmatrix} w^1 \\ z^2 \end{pmatrix}^{i+1} \neq \begin{pmatrix} w^1 \\ z^2 \end{pmatrix}^i$

$\begin{pmatrix} w^2 \\ z^1 \end{pmatrix}^{i+1} \neq \begin{pmatrix} w^2 \\ z^1 \end{pmatrix}^i$ $(i=1,2,\cdots)$

(iv) $F^{i+1} \neq F^i$ $(i=1,2,\cdots)$

(v) t^1 liegt in einem FF-Kegel $F^0 \neq F^1$.

Die Bedingung (iii) stellt sicher, daß t^i und t^{i+1} Extrempunkte der FF-Facette F^i sind, die einander "gegenüber" liegen. Mit Satz (5.2.8), (iv) und (v) folgert man, daß kein Punkt t^i mehrfach durchlaufen werden kann. Rhombenpfade sind also endlich.
A priori gibt es zwei Möglichkeiten des Abbruchs:

(a) Ein Extrempunkt t^i ist erreicht, der nur in einer FF-Facette liegt (nämlich in F^{i-1}) :
t^i ist eine komplementäre oder eine fastkomplementäre Lösung;

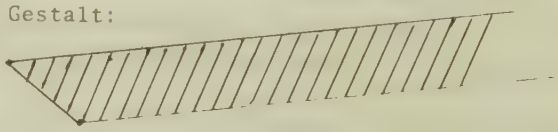
(b) Eine Facette F^i ist erreicht, die keinen Extrempunkt t^{i+1} besitzt, der (iii) erfüllt:
F^i ist eine unbeschränkte FF-Facette.

Der Fall (b) kann jedoch ausgeschlossen werden:

(5.2.10) Satz: Jede unbeschränkte FF-Facette des Polyeders P ist ein FF-Kegel. Das Polyeder P hat m·n FF-Kegel; diese gehören paarweise verschiedenen Klassen $(\sigma,\tau) \in I \times J$ an.

Den Beweis findet man in Bastian ([4], S. 17 und S. 19f) .

Das Polyeder P besitzt demnach keine FF-Facetten der folgenden Gestalt:



Da alle FF-Facetten eines Rhombenpfades derselben Klasse angehören, hat Satz (5.2.10) das nützliche

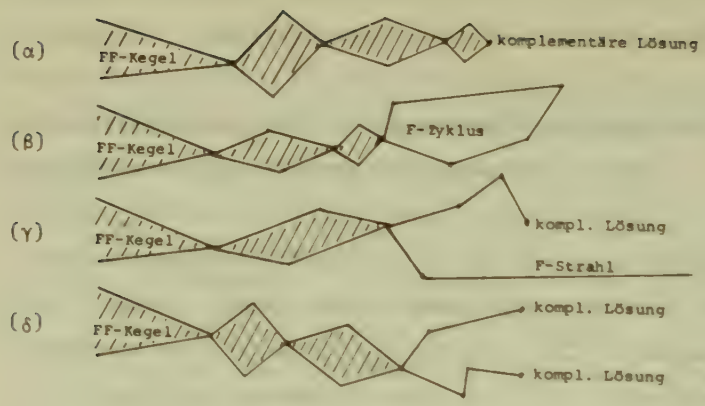
(5.2.11) Korollar: Rhombenpfade führen zu komplementären oder zu fastkomplementären Lösungen von LK(M,q).

Man erkennt nun, wie mit Hilfe von Rhombenpfaden komplementäre Lösungen aufgefunden werden können: entweder ist der Endpunkt $(\hat{\frac{0}{2}})$ eines Rhombenpfades bereits komplementär, oder aber $(\hat{\frac{0}{2}})$ ist fastkomplementär und liegt in einem F-Pfad (vgl. Lemma (2.2.5)), der anschließend in beiden Richtungen durchlaufen werden kann.
Bildet der Kantenzug des F-Pfades einen Zyklus, so muß die Iteration ohne Erfolg abgebrochen werden. Andernfalls stößt man auf mindestens einer Seite auf eine komplementäre Lösung, weil es für jeden Index $j \in I \cup J$ nur eine unbeschränkte F-Facette der Klasse j auf dem Polyeder P gibt (vgl. Lemke-Howson [60]).

Die folgende Skizze† veranschaulicht die vier auftretenden Möglichkeiten. Man beachte, daß in den Fällen (α) und (δ) komplementäre Lösungen gefunden werden können, die für den Hansen-Mathiesen-Algorithmus unzugänglich sind.

---

† übernommen aus Bastian ([5], S. 148).



Rechnerisch erfolgt das Durchlaufen von Rhombenpfaden zweckmäßig folgendermaßen:

(5.2.12) Die Methode der Rhombenpfade

Voraussetzung: Gegeben sei das Problem LK(M,q), dessen Daten $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^T & O \end{pmatrix}$, $A > O$, $B > O$, $q = -e$ die Annahme (5.2.4) erfüllen.

Schritt 0: Man setze $H := \emptyset$, $UNB(j) := 0$ $(j=1,..,k)$ und führe die folgenden Schritte für jedes Paar von Indices $(\sigma,\tau) \in I \times J$ aus. Man benutze dabei jeweils das Ausgangstableau:

$w_1 \cdots w_k$		$z_1 \cdots z_k$		
I_m	O	O	$-A$	$-e_m$
O	I_n	$-B^T$	O	$-e_n$

Schritt 1: Man pivotiere gleichzeitig auf z_σ und z_τ derart, daß das Ausgangstableau zulässig wird (alle weiteren Pivotschritte erhalten die Zulässigkeit); zwei Variablen w_μ und w_ν verlassen dabei die Basis ($\mu \in J$; $\nu \in I$).
Kommentar: es resultiert eine zulässige Basislösung $\hat{t}$, die Ursprung eines FF-Kegels ist.

Schritt 2: Ist $\hat{t}$ nicht komplementär, so gehe man zu Schritt 3. Andernfalls prüfe man, ob $\hat{t} \notin H$ gilt und setze ggf. $H := H \cup \{\hat{t}\}$; STOP.

Schritt 3: Ist $\hat{t}$ fastkomplementär der Klasse σ, so setze man $j := \sigma$ und gehe zu Schritt 5.
Ist $\hat{t}$ fastkomplementär der Klasse τ, so setze man $j := \tau$ und gehe zu Schritt 5.

Schritt 4: Man pivotiere gleichzeitig auf z_μ und z_ν; allgemein: man nehme die beiden Variablen in die Basis, deren komplementäre Variablen im vorangegangenen Schritt die Basis verlassen haben.
Kommentar: es resultiert eine zulässige Basislösung $\hat{\hat{t}}$.
Man setze $\hat{t} := \hat{\hat{t}}$ und gehe zu Schritt 2.

Schritt 5: Man speichere das zu $\hat{t}$ gehörige Tableau TAB sowie den Index $\alpha \in I \cup J$, für den gilt:
$\hat{w}_\alpha = \hat{z}_\alpha = 0$.

Schritt 6: Man pivotiere in der Spalte von w_α in TAB. Man verfahre weiter nach der Pivot-Regel (2.3.1).

- Wird t wieder erreicht, STOP.

  Kommentar: ein Zyklus (Fall (β)).

- Wird ein Tableau erreicht, in dem die Pivotspalte kein positives Element hat, so frage man den Wert von UNB(j) ab. Gilt UNB(j) = 1, STOP; andernfalls setze man UNB(j) = 1 und gehe zu Schritt 7.

  Kommentar: unbeschränkte F-Facette (Fall (γ)).

- Wird eine komplementäre Lösung erreicht, so prüfe man, ob sie noch nicht in H ist, und füge sie ggf. hinzu. Ist sie bereits mit j markiert, STOP ; andernfalls markiere man mit j und gehe zu Schritt 7.

Schritt 7: Man pivotiere in der Spalte von z_α in TAB. Man verfahre dann nach der Pivot-Regel (2.3.1).

- Wird ein Tableau erreicht, in dem die Pivotspalte kein positives Element hat, so setze man UNB(j) := 1 , STOP.

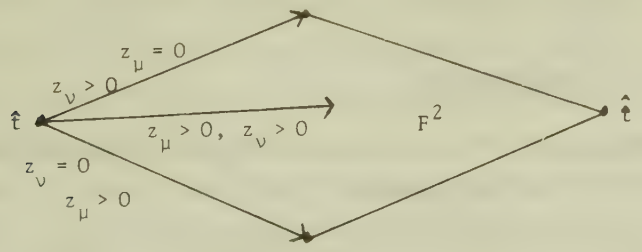
- Wird eine komplementäre Lösung erreicht, so prüfe man, ob sie noch nicht in H ist und füge sie ggf. hinzu; man markiere diese Lösung mit j; STOP.

Δ

Da die Matrizen A und B nur positive Elemente besitzen, erhält man durch eine ausreichende Erhöhung der Variablen z_σ und z_τ im Ausgangstableau von Schritt 0 zulässige Punkte des Polyeders P_-. Schritt 1 ist also ausführbar.
Man überzeugt sich anhand der vorausgegangenen Definition leicht davon, daß

$$F^1 := \left\{ \binom{w}{z} \geq 0 \;\middle|\; w = M \cdot z - e_k \,,\; z_i = 0 \quad \text{für} \quad i \notin \{\sigma,\tau\} \right\}$$

der FF-Kegel der Klasse (σ,τ) ist. Gilt $\mu = \tau$ und $\nu = \sigma$, so ist der Ursprung $\hat{t}$ von F^1 bereits komplementär und wird im Schritt 1 gespeichert. Ist $\hat{t}$ fastkomplementär (der Klasse σ oder der Klasse τ), so wird im Schritt 3 die Klassennummer dem Index j zugewiesen.
Ist $\hat{t}$ fast fastkomplementär, so liegt dieser Punkt nach Satz (5.2.8) außer in F^1 noch in genau einer anderen FF-Facette F^2. Man erkennt unschwer, daß durch eine Erhöhung der Variablen z_μ und z_ν Punkte der Facette F^2 durchlaufen werden. Nach Korollar (5.2.11) ist F^2 sowie jede weitere Facette auf dem Rhombenpfad beschränkt; der Schritt 4 ist also ausführbar und resultiert in dem $\hat{t}$ gegenüber liegenden Extrempunkt $\hat{\hat{t}}$.



$\hat{t}$ ist wie t komplementär, fastkomplementär oder fast fastkomplementär; man wiederholt die Schritte 2 bis 4, um gegebenenfalls den Rhombenpfad fortzusetzen.
Stößt der Rhombenpfad im Schritt 3 auf eine F-Lösung (und damit auf einen fastkomplementären Pfad), so wird dieser im Schritt 6 zunächst in der einen Richtung durchlaufen; handelt es sich nicht um einen geschlossenen Kantenzug und nicht um einen F-Pfad, der bereits durchlaufen worden ist, so wird er im Schritt 7 auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.
Man beachte, daß das Verfahren endlich ist: wegen Korollar (5.2.11) ist das Kreisen in den Schritten 2 bis 4 ausgeschlossen. Der in den Schritten 6 und 7 durchlaufene Kantenzug von F-Facetten ist mit Sicherheit dann endlich, wenn er offen ist (vgl. Lemma (2.2.5) von S. 17); ist er geschlossen, so wird dies im Schritt 6 aufgedeckt.

Für die Bestimmung möglichst vieler Gleichgewichtspunkte in Bimatrixspielen schlagen wir hier vor, die Methode der Rhombenpfade mit dem Hansen-Mathiesen-Algorithmus zu verknüpfen:

(5.2.13) Algorithmus

Voraussetzung: Es sei die Voraussetzung von Algorithmus (5.2.12) erfüllt.

Schritt 1: Man führe den Algorithmus (5.2.12) aus.

Kommentar: die Menge H enthält nun alle komplementären Lösungen, die mit der Methode der Rhombenpfade auffindbar sind.

Schritt 2: Man führe die Schritte 2 und 3 von Algorithmus (5.1.1) aus.
Kommentar: es wird geprüft, ob in komplementären Lösungen initiierbare F-Pfade zu neuen komplementären Lösungen führen.

Man kann leicht zeigen (vgl. Bastian [4], S. 25) , daß alle komplementären Lösungen, die über einen der in einer unbeschränkten F-Facette initiierten F-Pfade erreicht werden können, auch mit der Methode der Rhombenpfade gefunden werden. Somit folgt:

(5.2.14) Korollar: Der Algorithmus (5.2.13) bestimmt mindestens alle diejenigen Gleichgewichtspunkte, die auch mit dem Hansen-Mathiesen-Algorithmus gefunden werden.

Darüber hinaus können auch mehr Gleichgewichtspunkte bestimmt werden, wie das Beispiel von Seite 141 zeigt.
Weitere Rechenerfahrungen mit dem Algorithmus (5.2.13) findet man in Bastian [4].
Bislang ist kein Bimatrixspiel bekannt, für das der Algorithmus (5.2.13) nicht sämtliche Gleichgewichtspunkte bestimmt.

6. Weitere Verfahren und verwandte Methoden

6.1 Weitere Verfahren zur Lösung linearer Komplementärprobleme

In diesem Abschnitt sollen in knapper Form einige weitere Verfahren erwähnt werden, die zur Lösung linearer Komplementärprobleme vorgeschlagen worden sind.

Den Komplementärpivot-Algorithmen am ehesten verwandt ist die Methode der Hauptaustauschschritte ("principal pivoting") von Cottle und Dantzig ([17]; siehe auch Wendler [97]). Dieses Eliminationsverfahren ist auf Probleme LK(M,q) anwendbar, bei denen die Matrix M positiv semidefinit ist.

Auf speziell strukturierte Komplementärprobleme in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften wurden iterative Verfahren erfolgreich angewandt (siehe z.B. Cryer [14], Fridman und Chernina [33]; vgl. auch Cottle [9], Eckhardt [29], [30]). Es handelt sich dabei um Modifikationen der Gauss-Seidel Methode (vgl. Varga [96], Kap. 3.1) oder

eines "successive overrelaxation" - Ansatzes (vgl. Eckhardt [30], S. 13ff).
"Generell kann man sagen, daß sich iterative Verfahren mit Vorteil verwenden lassen, wenn die Koeffizientenmatrix des Ungleichungssystems besonders groß ist, wenn man den Einfluß von Rundungsfehlern in Grenzen halten will oder wenn die Koeffizientenmatrix eine numerisch besonders günstige Struktur hat, die durch Eliminationsverfahren zerstört werden würde" (Eckhardt [29], S. 7).
Rechenerfahrungen wurden von Eckhardt [30] und von Cottle [9] berichtet.

Für den Fall, daß M eine tridiagonale Minkowski-Matrix† ist, entwickelten Cottle und Sacher [13] ein effizientes direktes Lösungsverfahren. Das bereits von Cryer [14] untersuchte "free boundary problem for infinite journal bearings" fällt zum Beispiel in diese Klasse von Komplementärproblemen. Rechenergebnisse von Sacher [80] zeigen deutlich, daß sein direktes Verfahren (für diese Aufgabenstellung) den iterativen Verfahren vorzuziehen ist.

Angeregt durch ein von Gulio Maier [19] aufgeworfenes Problem aus der Baustatik beschäftigten sich Cottle [7],[8]

---

† Eine Minkowski-Matrix ist eine Z-Matrix (vgl. S. 34) mit positiven Hauptminoren. Eine tridiagonale Minkowski-Matrix erfüllt zusätzlich die Bedingung: $M_{ij} = 0$, falls $|i - j| > 1$ gilt.

und Kaneko [52] mit folgendem parametrischen linearen Komplementärproblem:

PLK(M,q,p): man bestimme Lösungen $\begin{pmatrix} \hat{w}(\alpha) \\ \hat{z}(\alpha) \end{pmatrix}$ der linearen Komplementärprobleme aus der Menge

$$\{ LK(M,q+\alpha\cdot p) \mid \alpha \geq 0 \}$$

sowie eine obere Schranke $\bar{\alpha} \in R^1 \cup \{\infty\}$ mit der Eigenschaft:

$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha} \longrightarrow \hat{z}(\alpha_1) \leq \hat{z}(\alpha_2)$;

hierbei ist p ein k-Vektor und α ein skalarer Parameter.

Cottle [7] gab einen Algorithmus an, der PLK(M,q,p) löst, falls q nichtnegative Komponenten hat und M entweder positiv semidefinit ist oder positive Hauptminoren besitzt. Kaneko [52] löste das Problem für den Fall, daß M eine Z-Matrix† ist.

---

† vgl. die Definition der Klasse Z auf S. 34 .

6.2 Lemkes kombinatorischer Ansatz außerhalb der Klasse der Komplementärpivot-Algorithmen

Der kombinatorische Ansatz, auf dem der Endlichkeitsbeweis des Lemke-Howson-Algorithmus' beruht, ist auch auf andere, zum Teil sehr unterschiedlich geartete Probleme übertragbar. Ein Beispiel aus der Graphentheorie gibt Dantzig [16]:

Dantzig betrachtet Graphen† $G = (N, R \cup S)$ mit der Eckenmenge N und der Kantenmenge $R \cup S$, die in zwei disjunkte gleichmächtige Mengen $R = \{r_1, r_2, \cdot\cdot, r_m\}$ und $S = \{s_1, s_2, \cdot\cdot, s_m\}$ zerfällt. Ein komplementärer Baum in solchen Graphen ist ein spannender Baum $B = (N,T)$ in G ($T \subset R \cup S$; $|T| = |N| - 1$) mit der Eigenschaft

$$r_i \in T \Longrightarrow s_i \notin T \qquad (i=1,\cdot\cdot,m) \qquad (I)$$

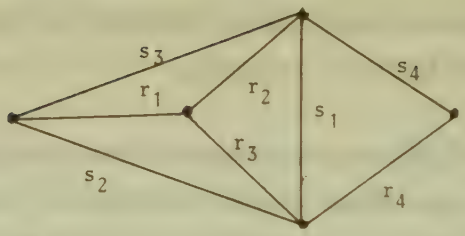
Ein komplementärer Baum muß keineswegs immer existieren; Dantzig zeigte jedoch:

(6.2.1) Satz: Existiert in einem Graphen G ein komplementärer Baum, so gibt es mindestens einen weiteren komplementären Baum in G.

Als Beispiel diene die folgende Veranschaulichung eines Graphen $G = (N, R \cup S)$:

---

† zu den verwendeten graphentheoretischen Begriffen vgl. Harary ([45], Kap. 2 und 4).



Offensichtlich ist sowohl durch die Kantenmenge
$T = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ als auch durch die Kantenmenge
$\hat{T} = \{s_1, s_2, r_3, r_4\}$ ein komplementärer Baum gegeben.

Den Beweis zu Satz (6.2.1) führt Dantzig konstruktiv. Ausgehend von einem komplementären Baum werden - jeweils durch Hinzufügen und Wegnahme genau einer Kante - sukzessive spannende Bäume des Graphen G erzeugt, die die Bedingung (I) höchstens für einen festen Index j verletzen (fastkomplementäre Bäume der Klasse j).
Ferner wird sichergestellt, daß die erzeugte Folge von Bäumen (in beiden Richtungen) eindeutig bestimmt ist und daß der komplementäre Baum, von dem ausgegangen wurde, nicht erneut erzeugt werden kann. Mit der Endlichkeit der Anzahl fastkomplementärer Bäume der Klasse j im Graphen G folgt daraus die Behauptung.

Diese Argumentationsweise gleicht augenscheinlich der von Lemke und Howson (vgl. Abschnitt 2.2).

6.2.1 Verfahren zur Bestimmung ökonomischer Gleichgewichte : eine Übersicht

Während der Satz (6.2.1) vorwiegend von theoretischem Interesse ist, soll im folgenden auf eine Anwendung des Lemke-Howson-Prinzips eingegangen werden, die von erheblicher ökonomischer Bedeutung ist, nämlich auf Verfahren zur (approximativen) Berechnung ökonomischer Gleichgewichte.

Die Gleichgewichtstheorie nimmt eine hervorragende Stellung in der mathematischen Wirtschaftstheorie ein. Dies wird sogar von Theorie-Kritikern anerkannt:

"Die Wirtschaftswissenschaft hat bis heute nur eine einzige abgeschlossene Theorie hervorgebracht, die die Funktionsweise der Wirtschaft aus systemtheoretischer Sicht, und zwar mit Hilfe eines formalisierten Modells beschreibt. Dieses reine Gedankengebäude ist die auf Walras zurückgehende allgemeine Gleichgewichtstheorie (general equilibrium theory)" (Kornai [54], S. 3).

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der Gleichgewichtstheorie in den vergangenen 25 Jahren war der Brouwersche Fixpunktsatz und seine Verallgemeinerung durch Kakutani. Mit Hilfe dieser Sätze konnte für eine Vielzahl von Modellen die Existenz eines Gleichgewichts nachgewiesen werden, obgleich brauchbare Verfahren zur tatsächlichen Bestimmung einer Gleichgewichtslösung noch nicht vorhan-

den waren. "By a suitable definition of the mappings involved in Brouwer's theorem and its generalizations, the consistency of the Walrasian model was finally established. ... the solution of the existence problem undoubtedly represents one of the most impressive uses of mathematical techniques in economic theory" (Scarf [87], S. 6).
"... Kakutani's theorem has been the basic tool in virtually all subsequent work" (Arrow-Hahn [2], S. 10).

In den vergangenen acht Jahren sind nun Algorithmen entwickelt worden, die das Lemke-Howson-Prinzip auf nichtlineare Strukturen übertragen und insbesondere zur Berechnung ökonomischer Gleichgewichtspunkte und zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme geeignet sind.
Den Anstoß gab Herbert Scarf [85] mit einem konstruktiven Beweis dafür, daß das Core eines balancierten N-Personenspiels nicht leer ist.† Wenig später veröffentlichte Scarf [86] das Konzept der "Grundmengen" (primitive sets) und zeigte, wie sich mit Hilfe dieser neuen Strukturen Brouwersche Fixpunkte approximativ bestimmen lassen. Die Arbeit enthält bereits Rechenerfahrungen sowie ein ökonomisches Anwendungsbeispiel, nämlich die Bestimmung von Gleichgewichtspreisen in einem allgemeinen Modell einer Tauschwirtschaft.

---

† Bemerkenswerterweise war es also wiederum - wie beim Verfahren von Lemke und Howson - die Spieltheorie, aus der heraus sich eine weitreichende neue Methode entwickelte.

Weitere Anwendungen, wie z.B. die Bestimmung von Kakutani-Fixpunkten, die Berechnung eines Gleichgewichts des Walras' schen Modells und die Lösung konvexer Programme finden sich bei Scarf [87] und bei Hansen [39]. Hansen [40],[41] benutzte das Konzept der Grundmengen außerdem zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichtspunkten nichtkooperativer N-Personenspiele und zur Berechnung stationärer Punkte nichtlinearer Programme mit konvexen Nebenbedingungen. Hansen übertrug in den genannten Arbeiten den Ansatz des Hansen-Mathiesen-Algorithmus' (vgl. Abschnitt 5.1) auf das Konzept der Grundmengen und ermöglichte auf diese Weise das Auffinden mehrerer Gleichgewichtspunkte bzw. mehrerer stationärer Punkte.

Eine weitere bedeutende Klasse von Algorithmen zur Bestimmung von Fixpunkten stetiger Abbildungen geht auf eine Arbeit von Harold Kuhn [56] zurück, in der er die enge Beziehung zwischen den Grundmengen von Scarf und den simplizialen Unterteilungen im Spernerschen Lemma† nachweist. Kuhn schlug einen Algorithmus vor, der nicht auf die Struktur der Grundmengen, sondern auf simpliziale Unterteilungen angewandt wird. Zwei verwandte Verfahren stammen von Eaves [21],[22]. Mit diesen "frühen" Algorithmen lassen sich bereits ziemlich rasch grobe Näherungs-

---

† Das Spernersche Lemma ist ein wichtiger Hilfssatz im klassischen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes (vgl. z.B. Stoer und Witzgall [91], S. 126 ff).

lösungen für Fixpunkte stetiger Abbildungen finden. Die Verfahren haben jedoch einen entscheidenden Nachteil: bei der nachträglichen Bestimmung einer genaueren Lösung kann kein Nutzen aus der schon berechneten Näherung gezogen werden.

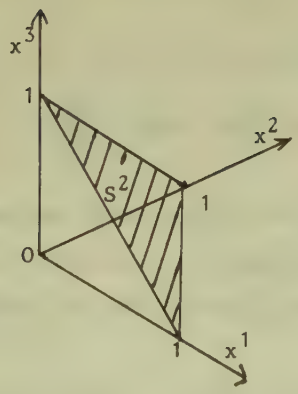
Diese Schwierigkeit wurde durch zwei unterschiedliche Ansätze überwunden: die Technik der "Homotopien" von Eaves [25],[28] und die auf Merrill [70] zurückgehenden "Sandwich-Methoden". Im folgenden Abschnitt erläutern wir die Sandwich-Methode von Kuhn und MacKinnon [57] am Beispiel der Approximation eines Brouwerschen Fixpunktes. Es wird dabei versucht, die Parallelen zum ursprünglichen Lemke-Howson-Algorithmus besonders herauszustellen.

6.2.2 Die Sandwich-Methode

Ein (n-1)-dimensionales Einheitssimplex S^{n-1} ist die Menge aller Punkte, die sich als konvexe Kombination der n Einheitsvektoren des R^n darstellen lassen:

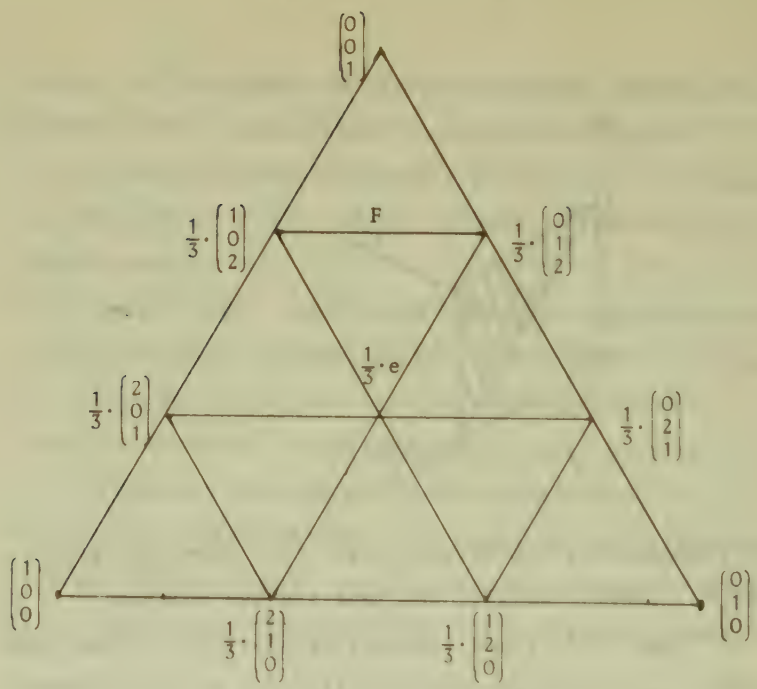
$$S^{n-1} = \{ x \in R^n \mid x \geq 0 \text{ und } e^T \cdot x = 1 \} .$$

Die folgende Skizze veranschaulicht S^2:



Der Fixpunktsatz von Brouwer (vgl. z.B. Stoer-Witzgall [91], S. 126ff) besagt, daß jede stetige Funktion $f: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. einen Punkt $\hat{x} \in S^{n-1}$ mit der Eigenschaft $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Das im folgenden dargestellte Verfahren von Kuhn und MacKinnon [57] approximiert einen solchen Fixpunkt.

Man betrachte zunächst die von Kuhn [55],[56] angegebene Triangulation von S^{n-1} in Untersimplexe. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß ein Punkt $x \in S^{n-1}$ genau dann Extrempunkt eines Untersimplexes ist, wenn er sich in der Gestalt $x = \frac{1}{D} \cdot y$ darstellen läßt, wobei D eine feste natürliche Zahl ist und $y \geq 0$ ein n-Vektor, dessen Komponenten ganzzahlig sind und sich zu D summieren.
Die folgende Skizze veranschaulicht die Triangulation von S^2 für $D = 3$.



Im folgenden interessieren uns zum einen die (n-1)-dimensionalen Untersimplexe von S^{n-1} und zum andern die (n-2)-dimensionalen Facetten dieser Untersimplexe.

Sei S_u^{n-1} das Untersimplex von S^{n-1} mit den Extrempunkten $x^1, x^2, \cdots, x^n$. Man erhält jede der n Facetten von S_u^{n-1} offenbar als konvexe Hülle von n-1 Punkten aus der Menge $\{x^1, \cdots, x^n\}$. Liegt eine solche (n-2)-dimensionale Facette auf dem Rand von S^{n-1}, so ist sie in keinem weiteren Untersimplex enthalten; andernfalls ist sie Teilmenge von genau zwei Untersimplexen.

In der obigen Skizze ist zum Beispiel

$$F = \left\{ x = \lambda \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

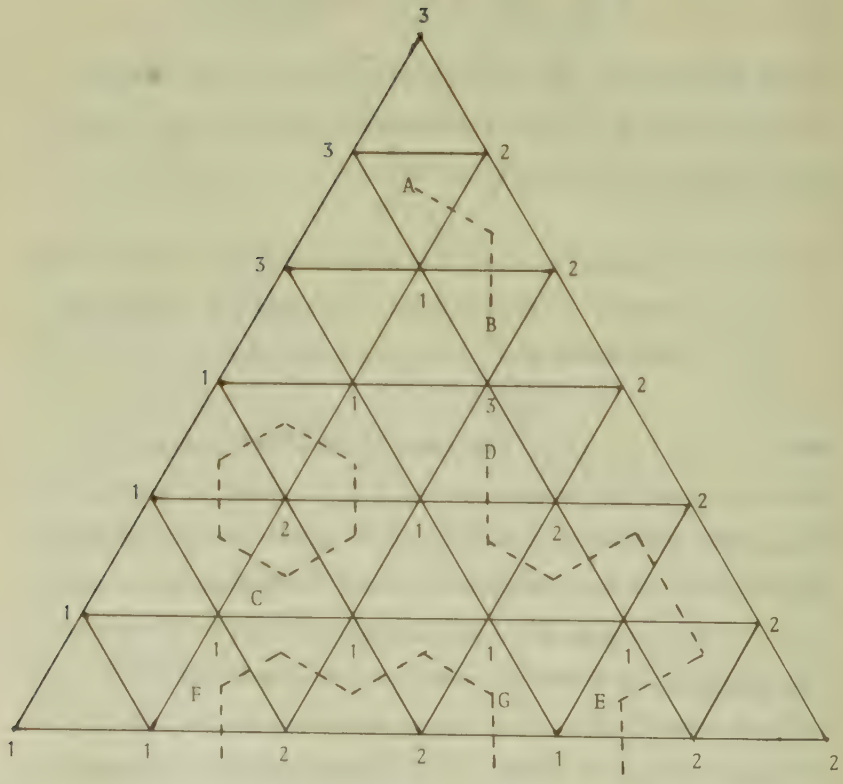
eine Facette der beiden Untersimplexe mit den Extrempunkten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jeder Extrempunkt der betrachteten simplizialen Unterteilung wird nun mit einer natürlichen Zahl zwischen 1 und n nach folgender Vorschrift markiert:

(6.2.2.1) Vorschrift: Ist die Komponente x_k eines Extrempunktes x gleich Null, so erhält x nicht die Markierung k.

Man beachte, daß jeder Extrempunkt der Unterteilung tatsächlich nach der Vorschrift (6.2.2.1) markiert werden kann, weil für alle $x \in S^{n-1}$ $x \neq 0$ gilt. Ferner sind die Markierungen der Extrempunkte von S^{n-1} eindeutig festgelegt, da es sich um die Einheitsvektoren handelt.
Die umseitige Abbildung stellt eine simpliziale Unterteilung von S^2 für $D = 6$ dar, die nach der Vorschrift (6.2.2.1) markiert wurde. Alle diejenigen (n-2)-dimensionalen Facetten von Untersimplexen sind mit einer gestrichelten Linie durchkreuzt worden, deren Extrempunkte mit den Zahlen $1,2,\cdot\cdot,n-1$ markiert sind. Eine solche Facette heißt eine Tür. Eine Tür, die auf dem Rand von S^{n-1} liegt, ist ein Eingang. Ein Untersimplex von S^{n-1} nennen wir ein Zimmer, wenn seine Extrempunkte mit den



(6.2.2.2) Abbildung: Die simpliziale Unterteilung von S^2 für $D = 6$ (übernommen aus Kuhn - MacKinnon ([57], S. 5)).

Markierungen $1,2,\cdot\cdot,n$ versehen sind; tragen $n-1$ Extrempunkte eines Untersimplexes S_u die Markierungen $1,2,\cdot\cdot,n-1$ und ist kein Extrempunkt von S_u mit n markiert, so ist S_u ein Korridor. In Abbildung (6.2.2.2) sind A, B und D Zimmer; alle übrigen Untersimplexe, durch die eine gestrichelte Linie verläuft, sind Korridore.

(6.2.2.3) Lemma: Jedes Zimmer hat genau eine Tür.

Beweis: Die Facetten eines Untersimplexes von S^{n-1} sind die konvexen Hüllen von jeweils $n-1$ Extrempunkten. Bei einem Zimmer sind die Extrempunkte mit den Markierungen $1,2,\cdot\cdot,n-1$ durch diese Zahlen eindeutig identifizierbar; es existiert also genau eine Tür.

(6.2.2.4) Lemma: Jeder Korridor hat genau zwei Türen.

Beweis: Ein Korridor S_u hat offensichtlich genau zwei Extrempunkte, die die gleiche Markierung $j \in \{1,2,\cdot\cdot,n-1\}$ tragen; die übrigen $n-2$ Extrempunkte sind durch die Markierungen $1,2,\cdot\cdot,j-1, j+1,\cdot\cdot,n-1$ eindeutig identifizierbar.
Es gibt also genau zwei Facetten von S_u, die mit den Zahlen $1,2,\cdot\cdot,n-1$ markiert sind.

(6.2.2.5) Definition: Ein Sim-Pfad ist eine alternierende Folge $t^1, F^1, t^2, F^2, \cdots$ von Korridoren oder Zimmern t^i und Türen F^i mit der Eigenschaft:

(i) $F^i \subset t^i$ für alle $i=1,2,..$

(ii) $F^i \subset t^{i+1}$ für alle $i=1,2,..$

(iii) $t^{i+1} \neq t^i$ und $t^{i+1} \neq t^1$ für alle $i=1,2,..$

(iv) $F^{i+1} \neq F^i$ für alle $i=1,2,..$.

In Abbildung (6.2.2.2) läßt sich ein Sim-Pfad in jedem Untersimplex initiieren, das von einer unterbrochenen Linie berührt wird; entlang dieser Linie kann der Pfad dann fortgesetzt werden.

Betrachtet man die folgende Zuordnung von Begriffen:

"Türen" - "fastkomplementäre Facetten"

"Korridore" - "fastkomplementäre Extrempunkte"

"Zimmer" - "komplementäre Lösungen",

so erkennt man die Analogie zwischen Sim-Pfaden und den im Abschnitt 2.2 betrachteten F-Pfaden.†

Wegen (iii) sind Sim-Pfade endlich; es gibt offenbar drei Möglichkeiten des Abbruchs:

---

† Entsprechend wie bei F-Pfaden (vgl. S. 15) könnte man auch bei Sim-Pfaden verschiedene Klassen definieren; man beachte dazu, daß die Wahl von $1,2,..,n-1$ für die Markierung der Türen willkürlich war.

(a) für einen Index j gibt es keine Tür F^{j+1}, die den Bedingungen (i) und (iv) genügt:
t^{j+1} ist ein Zimmer;

(b) für einen Index j gibt es weder Korridor noch Zimmer $t^{j+1} \neq t^j$, welche der Bedingung (ii) genügen:
F^j ist ein Eingang;

(c) für einen Index j gibt es zwar ein $t^{j+1} \neq t^j$ mit $F^j \subset t^{j+1}$, es gilt jedoch $t^{j+1} = t^1$:
man ist zum ersten Korridor zurückgekehrt.

Die Situationen (a), (b) und (c) korrespondieren mit den drei möglichen Abbruchsituationen von F-Pfaden (vgl. S. 20f). "Eingänge" entsprechen offensichtlich den unbeschränkten F-Facetten; analog zu Lemma (2.2.8) zeigt man daher:

(6.2.2.6) Lemma: Wird ein Sim-Pfad in einem Korridor t^1 initiiert, dessen eine Tür ein Eingang ist, so endet er entweder in einem anderen Eingang (vgl. den Pfad von F nach G in Abb. (6.2.2.2)) oder aber er führt zu einem Zimmer (vgl. den Pfad von E nach D in Abb. (6.2.2.2)).

(6.2.2.7) Korollar: Ist eine simpliziale Unterteilung von S^{n-1} im Rahmen der Vorschrift (6.2.2.1) so markiert worden, daß nur ein Eingang existiert, so läßt sich ein Untersimplex von S^{n-1} bestimmen, dessen Extrempunkte die Markierungen 1,2,··,n tragen.

Gelänge es nun, in Abhängigkeit von einer vorgegebenen stetigen Funktion $f: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ eine Markierungsvorschrift für simpliziale Unterteilungen von S^{n-1} zu finden, für die

1. S^{n-1} genau einen Eingang hat und
2. die Punkte eines Zimmers näherungsweise Fixpunkte von f sind,

so böte das Korollar (6.2.2.7) augenscheinlich eine Möglichkeit, einen Fixpunkt der Abbildung f zu approximieren. Dieser Gedanke soll nun weiter verfolgt werden:

Sei x ein beliebiger Extrempunkt eines Untersimplexes der oben betrachteten simplizialen Unterteilung von S^{n-1}. Man betrachte die folgende Markierungsvorschrift von Kuhn und MacKinnon ([57], S. 7):

(6.2.2.8) Vorschrift: Sei $J := \{j \mid x_j > 0\}$ und $K := \{j \in J \mid f_j(x) - x_j \leq f_i(x) - x_i \text{ für } i \in J\}$. Man markiere x mit dem Index $k \in K$, für den gilt: $k \leq j$ für alle $j \in K$.

Die Markierungsvorschrift (6.2.2.8) ist offenbar eindeutig und wegen $k \in K \subset J$ konkretisiert sie die Vorschrift (6.2.2.1); außerdem hat sie die folgende wichtige Eigenschaft:

(6.2.2.9) Lemma: Ist der Extrempunkt x mit dem Index k markiert, so gilt $f_k(x) - x_k \leq 0$.

Beweis: Andernfalls gälte $f_j(x) - x_j > 0$ für alle $x_j > 0$ im Widerspruch zu $e^T \cdot x = e^T \cdot f(x) = 1$.

Mit Hilfe des Lemmas (6.2.2.9) läßt sich nun zeigen, daß in einer genügend feinen simplizialen Unterteilung von S^{n-1}, die nach der Vorschrift (6.2.2.9) markiert wurde, alle Punkte eines Zimmers Fixpunkte der Abbildung f approximieren.
Sei D die natürliche Zahl, die die simpliziale Unterteilung von S^{n-1} bestimmt (vgl. S. 163) und $\hat{x}$ ein beliebiger Punkt in einem Zimmer dieser Unterteilung. Die beiden folgenden Sätze† demonstrieren, daß $\hat{x}$ einen Fixpunkt von f sogar in doppelter Hinsicht approximiert:

(6.2.2.10) Satz: $\hat{x}$ ist "beinahe" ein Fixpunkt von f; d.h. gibt man $\varepsilon > 0$ vor, so gilt für genügend große Werte von D: $|f(\hat{x}) - \hat{x}| < \varepsilon$.

(6.2.2.11) Satz: $\hat{x}$ ist "nahe bei" einem Fixpunkt von f; d.h. gibt man $\varepsilon > 0$ vor, so existiert für genügend große Werte von D ein Fixpunkt $\bar{x}$ von f mit der Eigenschaft $|\hat{x} - \bar{x}| < \varepsilon$.

---

† zum Beweis siehe Kuhn-MacKinnon ([57], S. 7f).

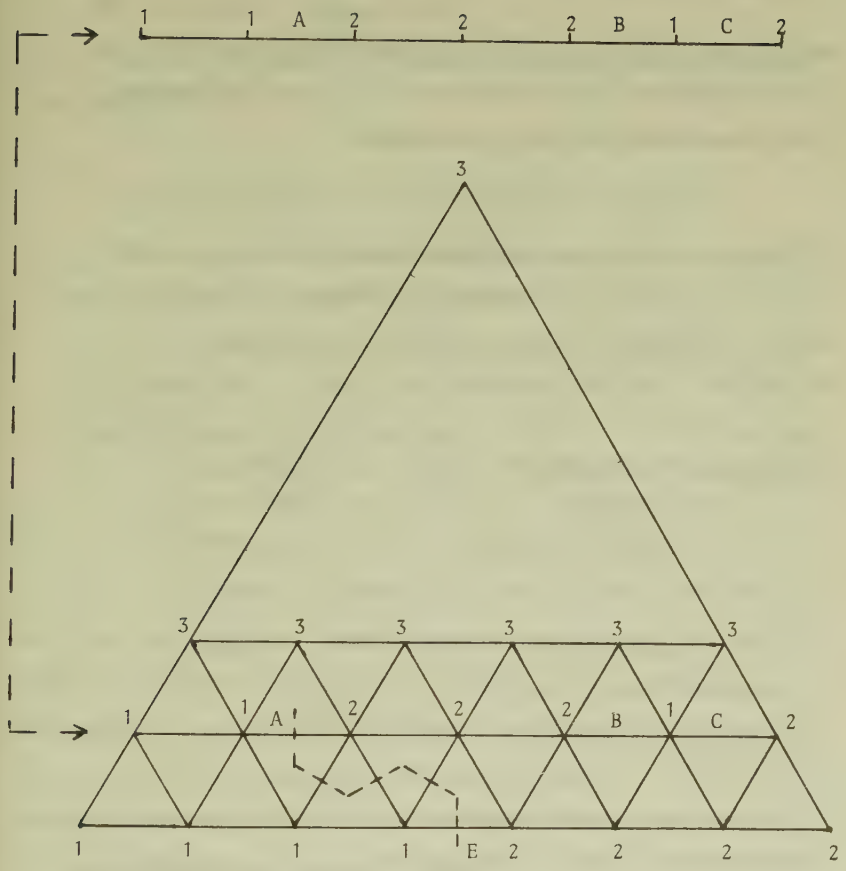
Wie bestimmt man nun ein Zimmer einer nach der Vorschrift (6.2.2.8) markierten simplizialen Unterteilung von S^{n-1} ?

Zunächst einmal stellt sich das Problem, einen Eingang aufzufinden. Die entsprechende Aufgabe bei der Lösung des Problems LK(M,q), nämlich die Ermittlung einer unbeschränkten F-Facette, löste Lemke dadurch, daß er die Dimension des Beschränkungspolyeders um eins erhöhte (vgl. Abschnitt 2.4). Analog wird bei der Sandwich-Methode das Simplex S^{n-1} in das höherdimensionale Simplex S^n eingebettet; die Markierung von S^{n-1} dehnt man dabei so auf S^n aus, daß ein Eingang von S^n offensichtlich wird. Kuhn und MacKinnon ([57], S. 11) geben sogar eine Markierung an, für die S^n genau einen Eingang besitzt. Ein dort initiierter Sim-Pfad führt notwendig zu einem Zimmer Z von S^n (vgl. Korollar (6.2.2.7)). Stellt man nun zudem noch sicher, daß eine der (n-1)-dimensionalen Facetten von Z ein Zimmer von S^{n-1} ist, so ist das Problem dieses Abschnitts offenbar gelöst.

Die Einbettung von S^{n-1} in S^n für $n = 2$ und $D = 6$ wird in Abbildung (6.2.2.12) veranschaulicht. A, B und C sind die Zimmer von S^{n-1}. Der einzige Eingang von S^n ist E; der im zugehörigen Korridor initiierte Sim-Pfad führt zu einem Zimmer Z von S^n, das A als Facette enthält.

---

† Die simpliziale Unterteilung im "oberen" Teil von S^n wurde weggelassen, da sie für das Verfahren keine Bedeutung hat.



(6.2.2.12) Abbildung: Die Einbettung von S^1 in S^2 für $D = 6$.

Die allgemeine Vorgehensweise soll im folgenden kurz skizziert werden.

Man betrachte die simpliziale Unterteilung von S^{n-1} für eine vorgegebene natürliche Zahl D. Jeder Extrempunkt x eines Untersimplexes hat die Gestalt

$$x^T = \frac{1}{D} \cdot y^T = \frac{1}{D} \cdot (y_1, y_2, \cdots, y_n) ;$$

hierbei hat $y \geq 0$ ganzzahlige Komponenten und es gilt $e^T \cdot y = D$. Durch die Angabe des Vektors y ist der zugehörige Extrempunkt offenbar eindeutig bestimmt.
Die Menge T der Extrempunkte der simplizialen Unterteilung von S^n für $D' = D+1$ läßt sich in folgender Weise in disjunkte Teilmengen zerlegen: $T = \bigcup_{i=0}^{n+1} T_i$ mit

$$T_0 = \left\{ z = \frac{1}{D+1} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; v \geq 0, \quad e^T \cdot v = D+1, \quad v_i \text{ ganz} \right\}$$

$$T_1 = \left\{ z = \frac{1}{D+1} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \geq 0, \quad e^T \cdot y = D, \quad y_i \text{ ganz} \right\}$$

$$T_2 = \left\{ z = \frac{1}{D+1} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; v \geq 0, \quad e^T \cdot v = D-1, \quad v_i \text{ ganz} \right\}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$T_{D+1} = \left\{ (0,0,\cdots,1)^T \right\} .$$

Man ordne nun in naheliegender Weise die Extrempunkte der Untersimplexe von S^{n-1} den Punkten von T_1 eineindeutig zu (vgl. auch Abb. (6.2.2.12)).†

---

† Anschaulich gesprochen wird S^{n-1} dadurch zwischen den konvexen Hüllen von $T_0 \cup T_1$ und $T_1 \cup T_2$ eingeschlossen, wie der Belag eines Sandwiches zwischen den umgebenden Weißbrotscheiben. Von dieser Anschauung leitet sich der Begriff "Sandwich-Methoden" ab.

Sei $\hat{x} = \frac{1}{D} \cdot \hat{y}$ ein Extrempunkt eines Untersimplexes von S^{n-1}, in dessen Nähe man einen Fixpunkt der Abbildung $f: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ vermutet.†

Die Elemente der Menge T markiere man nach der folgenden Vorschrift:

(6.2.2.13) Vorschrift:

(a) $z = \frac{1}{D+1} \cdot \binom{y}{1} \in T_1$ erhält die gleiche Markierung wie der Punkt $x = \frac{1}{D} \cdot y \in S^{n-1}$;

(b) $z \in T_j$ $(j=2,3,\cdot\cdot,D+1)$ erhält die Markierung $n+1$;

(c) $z = \frac{1}{D+1} \cdot \binom{v}{0} \in T_0$ erhält als Markierung den kleinsten Index $k \in \{1,2,\cdot\cdot,n\}$, für den gilt:
$(v_k - \hat{y}_k) \geq (v_i - \hat{y}_i)$ für alle $i=1,2,\cdot\cdot,n$.

Es läßt sich zeigen (siehe Kuhn-MacKinnon [57], S. 11ff), daß die Vorschriften (6.2.2.1) und (6.2.2.13) miteinander vereinbar sind und daß die so markierte simpliziale Unterteilung von S^n genau einen Eingang E hat.
Aus Korollar (6.2.2.7) folgt der Abbruch eines dort initiierten Sim-Pfads in einem Zimmer Z von S^n. Da Z einen Extrempunkt mit der Markierung $n+1$ sowie Extrempunkte mit anderen Markierungen besitzt, liegen diese Punkte in der

---

† Besitzt man keinerlei Vorinformation, so wähle man $\hat{x}$ beliebig.

Menge $T_1 \cup T_2$. Offensichtlich befinden sich alle Extrempunkte von Z mit den Markierungen $1,2,\cdots,n$ in der Menge T_1. Ist $\hat{z} = \frac{1}{D+1} \cdot \binom{\hat{y}}{1}$ in der konvexen Hülle dieser Punkte enthalten, dann liegt $\hat{x} = \frac{1}{D} \cdot \hat{y}$ in einem Zimmer von S^{n-1}.

Die Sätze (6.2.2.10) und (6.2.2.11) stellen nun sicher, daß $\hat{x}$ einen Fixpunkt der Abbildung f approximiert.

Bei der Anwendung des dargestellten Verfahrens berechnet man zunächst nur eine grobe Näherung des gesuchten Fixpunktes, indem man die Zahl D nicht allzu groß wählt.† In späteren Iterationen verfeinert man die simpliziale Unterteilung durch Vergrößerung von D. Die Sim-Pfade werden dabei stets möglichst nahe bei der besten Näherungslösung initiiert (vgl. die Vorschrift (6.2.2.13c)). Eine algorithmische Darstellung des Verfahrens findet man bei Kuhn und MacKinnon [57]. Dort wird auch über Erfahrungen bei der Berechnung von Lösungen der bereits von Scarf [86] betrachteten ökonomischen Gleichgewichtsmodelle berichtet.

---

† Kuhn und MacKinnon ([57], S. 17) schlagen eine Größenordnung von $D = 4 \cdot n$ vor.

6.2.3 Entwicklungstendenzen der Komplementärtheorie: Vereinheitlichung durch Abstraktion

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde deutlich, daß die bestehenden Lösungsverfahren, denen das Prinzip des Lemke-Howson-Algorithmus' zugrunde liegt, zum Teil auf sehr unterschiedliche mathematische Strukturen angewandt werden. Abstrahiert man von den bislang erörterten konkreten Beispielen (fastkomplementäre Pfade, Rhombenpfade, Sim-Pfade, komplementäre Bäume), so erkennt man, daß alle diese konstruktiven Verfahren auf der folgenden Tatsache beruhen (vgl. Dantzig [16], S. 502) :

(6.2.3.1) Satz: Gegeben sei eine endliche Menge S und eine Relation "Nachbar" mit folgenden Eigenschaften:

(i) Ist $i \in S$ Nachbar von $j \in S$, dann ist j auch Nachbar von i (Symmetrie).

(ii) Kein Element $i \in S$ ist Nachbar von sich selbst (Antireflexivität).

(iii) Kein Element von S hat mehr als zwei Nachbarn.

(iv) Mindestens ein Element von S hat genau einen Nachbarn.

Dann besitzt S mindestens zwei Elemente, die genau einen Nachbarn haben.

Aus dieser Erkenntnis erwuchs das Bestreben, Komplementär-Algorithmen in abstrakterer Weise darzustellen. Unabhängig voneinander haben Todd [93],[94] sowie Gould und Tolle [38] verallgemeinerte Komplementärtheorien entwickelt, mit deren Hilfe sich die bekannten Anwendungen des Lemke-Howson-Prinzips als Spezialfälle einer einheitlichen Theorie darstellen lassen.

Wolsey [98] benutzte den verallgemeinerte Komplemantär-Algorithmus von Todd [94] zu einem konstruktiven Beweis zweier kubischer Versionen des Spernerschen Lemmas † von Kuhn [55] und Fan [32], ohne daß er dabei auf simpliziale Unterteilungen zurückgreifen mußte.
Es ist also zu erwarten, daß die Theorien von Todd bzw. von Gould und Tolle nicht nur vereinheitlichend wirken, sondern darüber hinaus zur Erschließung neuer Anwendungen führen werden: "More generally other applications of generalized complementary pivoting, perhaps as a way of systematically exploring parameter space for the linear complementarity problem, appear to merit further investigation" (L.A. Wolsey [98], S. 17).

---

† vgl. die Fußnote von S. 161 .

7. Literaturverzeichnis

[1] Aggarwal, V. "On the Generation of All Equilibrium Points for Bimatrix Games Through the Lemke-Howson-Algorithm", Mathematical Programming 4(1973) 233-234.

[2] Arrow, K.J. und Hahn, F.H. General Competitive Analysis (San Francisco/Edinburgh 1971).

[3] Balinski, M.L. "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets", SIAM Journal on Applied Mathematics 9(1961) 72-88.

[4] Bastian, M. On the Generation of Extreme Equilibrium Points for Bimatrix Games by Complementary Pivoting, Discussion Paper 7403, Lehrstuhl für Math. Verfahrensforschung, Univ. Göttingen (Juli 1974).

[5] Bastian, M. "Fast fastkomplementäre Iterationspfade zur Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in Bimatrixspielen". In : Zimmermann, H.J. et al. (Hrsg.): Proceedings in Operations Research 4(1974) 141-152.

[6] Bastian, M. On the Existence of Equilibrium in an Economy with Institutional Constraints on Prices, Discussion Paper 7502, Lehrstuhl für Math. Verfahrensforschung, Univ. Göttingen (Januar 1975).

[7] Cottle, R.W. "Monotone Solutions of the Parametric Linear Complementarity Problem", Mathematical Programming 3(1972) 210-224.

[8] Cottle, R.W. "A Parametric Linear Complementarity Problem" (Solution to Problem 72-7), SIAM Review 15(1973) 381-384.

[9] Cottle, R.W. Computational Experience with Large-Scale Linear Complementarity Problems, Tech. Report SOL 74-13, Systems Opt. Lab., Dept. of Operations Research, Stanford University (September 1974).

[10] Cottle, R.W. und Dantzig, G.B. "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming", Linear Algebra and Its Applications 1(1968) 103-125.

[11] Cottle, R.W. und Ferland, J.A. "On Pseudo-Convex Functions of Nonnegative Variables", Mathematical Programming 1(1971) 95-101.

[12] Cottle, R.W. und Ferland, J.A. "Matrix-Theoretic Criteria for the Quasi-Convexity and Pseudo-Convexity of Quadratic Functions", Linear Algebra and Its Applications 5(1972) 123-136.

[13] Cottle, R.W. und Sacher, R.S. On the Solution of Large Structured Linear Complementarity Problems: I, Tech. Report 73-4, Dept. of Operations Research, Stanford University (April 1973).

[14] Cryer, C.W. "The Method of Christopherson for Solving Free Boundary Problems for Infinite Journal Bearings by Means of Finite Differences", Mathematics of Computation 25(1971) 435-443.

[15] Dantzig, G.B. Linear Programming and Extensions (5. Auflage Princeton 1972).

[16] Dantzig, G.B. "Complementary Spanning Trees". In: Abadie, J. (Hrsg.): Integer and Nonlinear Programming (Amsterdam/London 1970) 499-505.

[17] Dantzig, G.B. und Cottle, R.W. "Positive(semi)definite Programming". In: Abadie, J. (Hrsg.): Nonlinear Programming (Amsterdam 1967) 58-73.

[18] Dantzig, G.B. und Manne, A.S. A Complementarity Algorithm for an Optimal Capital Path with Invariant Proportions, Tech. Report 74-1, Dept. of Operations Research, Stanford University (Jan. 1974, revidiert März 1974).

[19] De Donato, O. und Maier, G. "Mathematical Programming Methods for the Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Frames Allowing for Limited Rotation Capacity", International Journal for Numerical Methods in Engineering 4(1972) 307-329.

[20] Dorfman, R., Samuelson, P.A. und Solow, R.M Linear Programming and Economic Analysis (New York/Toronto/London 1958).

[21] Eaves, B.C. "An Odd Theorem", Proceedings of the American Mathematical Society 26(1970) 509-513.

[22] Eaves, B.C. "Computing Kakutani Fixed Points", SIAM J.Appl.Math. 21(1971) 236-244.

[23] Eaves, B.C. "The Linear Complementarity Problem", Management Science 17(1971) 612-634.

[24] Eaves, B.C. "On Quadratic Programming", Management Science 17(1971) 698-711.

[25] Eaves, B.C. "Homotopies for Computation of Fixed Points", Mathematical Programming 3 (1972) 1-22.

[26] Eaves, B.C. "Polymatrix Games with Joint Constraints", SIAM J.Appl.Math. 24 (1973) 418-423.

[27] Eaves, B.C. A Finite Algorithm for the Linear Exchange Model, Tech. Report SOL 75-4, Systems Opt. Lab., Dept. of Operations Research, Stanford University (Februar 1975).

[28] Eaves, B.C. und Saigal, R. "Homotopies for Computation of Fixed Points on Unbounded Regions", Mathematical Programming 3(1972) 225-237.

[29] Eckhardt, U. Iterative Lösung linearer Ungleichungssysteme, Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Jül-880-MA (August 1972).

[30] Eckhardt, U. Quadratic Programming by Successive Overrelaxation, Berichte der Kernforschnungsanlage Jülich Jül-1064-MA (April 1974).

[31] Evers, J.J.M — Linear Infinite Horizon Programming, Research memorandum EIT-45, Tilburg Institute of Economics (Nov. 1973).

[32] Fan, K. — "Combinatorial Properties of Certain Simplicial and Cubical Vertex Maps", Archiv der Mathematik 11(1960) 368-377.

[33] Fridman, V.M. und Chernina, V.S. — "An Iteration Process for the Solution of the Finite-dimensional Contact Problem", U.S.S.R. Comp. Math. and Math. Phys. 7(1) (1967) 210-214.

[34] Gale, D. — The Theory of Linear Economic Models (New York/Toronto/London 1960).

[35] Garcia, C.B. — On the Relationship of the Lattice Point Problem, the Complementarity Problem and the Set Representation Problem, Tech. Report No. 145, Dept. of Math. Sciences, Clemson University, South Carolina (August 1973).

[36] Garcia, C.B. — "Some Classes of Matrices in Linear Complementarity Theory", Mathematical Programming 5(1973) 299-310.

[37] Garfinkel, R. und Nemhauser, G.L. — "Optimal Set Covering: A Survey". In: Geoffrion, A.M. (Hrsg.): Perspectives on Optimization (Menlo Park/London/Don Mills 1972) 164-193.

[38] Gould, F.J. und Tolle, J.W. — "A Unified Approach to Complementarity in Optimization", Discrete Mathematics 7(1974) 225-271.

[39] Hansen, T. "A Brief Survey of Some Applications of Fixed Point Methods". In: Łoś, J. und Łoś, M.W. (Hrsg.): Mathematical Models in Economics (Amsterdam/London/New York 1974) 449-459.

[40] Hansen, T. "On the Approximation of Nash Equilibrium Points in an N-Person Noncooperative Game", SIAM J.Appl.Math. 26 (1974) 622-637.

[41] Hansen, T. Generating Stationary Points for a Class of Mathematical Programming Problems by Fixed Point Algorithms, Discussion Paper 08/74, Norwegian School of Economics and Business Administration (Bergen 1974).

[42] Hansen, T. und Koopmans, T.C. "On the Definition and Computation of a Capital Stock Invariant under Optimization", Journal of Economic Theory 5(1972) 487-523.

[43] Hansen, T. und Manne, A.S. Equilibrium and Linear Complementarity - An Economy with Institutional Constraints on Prices, Discussion Paper 07/74, Norwegian School of Economics and Business Administr. (Bergen 1974).

[44] Hansen, T. und Mathiesen, L. Generating Stationary Points for a Nonconcave Quadratic Program by Lemke's Almost Complementary Pivot Algorithm, Discussion Paper 11/73, Norwegian School of Economics and Business Administration (Bergen 1973).

[45] Harary, F. Graph Theory (2.Auflage Menlo Park/ London/Don Mills 1971).

[46] Harsanyi, J.C. "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players", Management Science 14(1967) 159-182, 320-334, 486-502.

[47] Hartmann, R. und Reiser, P. "Über den Aufwand zur Lösung quadratischer Optimierungsprobleme mit den Algorithmen von Beale und von Lemke", Zeitschrift für Operations Research 18(1974) B57-B63.

[48] Howson, J.T. "Equilibria of Polymatrix Games", Management Science 18(1972) 312-318.

[49] Howson, J.T. und Rosenthal, R.W. "Bayesian Equilibria of Finite Two-Person Games with Incomplete Information", Management Science 21(1974) 313-315.

[50] Ingleton, A.W. "A Problem in Linear Inequalities", Proc. London Math. Soc.(3) 16(1966) 519-536.

[51] Kaneko, I. The Parametric Linear Complementarity Problem in the De Donato-Maier Analysis of Reinforced Concrete Beams, Tech. Report SOL 75-13, Systems Opt. Lab., Dept. of Operations Research, Stanford University (May 1975).

[52] Kaneko, I. Parametric Complementarity Problems, Dissertation, Dept. of Operations Research, Stanford University (Aug. 1975).

[53] Karamardian, S. "The Complementarity Problem", Mathematical Programming 2(1972) 107-129.

[54] Kornai, J. Anti-Äquilibrium (Berlin/Heidelberg/New York 1975).

[55] Kuhn, H.W. "Some Combinatorial Lemmas in Topology", IBM Journal of Research and Development 4(1960) 518-524.

[56] Kuhn, H.W. "Simplicial Approximation of Fixed Points", Proceedings of the National Academy of Sciences 61(1968) 1238-1242.

[57] Kuhn, H.W. und MacKinnon, J.G. The Sandwich Method for Finding Fixed Points, vervielfältigtes Manuskript, Dept. of Economics, Princeton University (April 1975).

[58] Lemke, C.E. "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", Management Science 11(1965) 681-689.

[59] Lemke, C.E. "Recent Results on Complementarity Problems". In: Rosen, J.B., Mangasarian, O.L. und Ritter, K. (Hrsg.): Nonlinear Programming (New York 1970).

[60] Lemke, C.E. und Howson, J.T. "Equilibrium Points of Bimatrix Games", SIAM J.Appl.Math. 12(1964) 413-423.

[61] Levitan, R.E. Demand in an Oligopolistic Market and the Theory of Rationing, Research Report RC-1545, IBM Watson Research Center, Yorktown Heights (January 1966).

[62] Lintner, J. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of Economics and Statistics 47 (1965) 13-37.

[63] Maier, G. "A Parametric Linear Complementarity Problem", SIAM Review 14(1972) 364-365.

[64] Mangasarian, O.L. Nonlinear Programming (New York 1969).

[65] Mangasarian, O.L. "Convexity, Pseudo-Convexity and Quasi-Convexity of Composite Functions", Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle 12(1970) 114-122.

[66] Markowitz, H.M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments (2.Auflage New Haven/London 1970).

[67] Martos, B. "Subdefinite Matrices and Quadratic Forms", SIAM J.Appl.Math. 17(1969) 1215-1223.

[68] Martos, B. "Quadratic Programming with a Quasi-Convex Objective Function", Operations Research 19(1971) 87-97.

[69] Mathiesen, L. Efficiency Pricing in a Linear Programming Model: A Case with Constraints on Dual Variables, Tech. Report SOL 74-18, Systems Opt. Lab., Dept. of Operations Research, Stanford University (November 1974).

[70] Merrill, O.H. — Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of Certain Non-empty Convex Upper Semicontinuous Point to Set Mappings, Tech. Report 71-7, Dept. of Industrial Engineering, University of Michigan (Ann Arbor September 1971).

[71] Mood, A.M. und Graybill, F.A. — Introduction to the Theory of Statistics (2.Auflage New York/San Francisco 1963).

[72] Murty, K.G. — "On the Number of Solutions to the Complementarity Problem and Spanning Properties of Complementary Cones", Linear Algebra and Its Applications 5(1972) 65-108.

[73] Murty, K.G. — Algorithm for Finding All the Feasible Complementary Bases for a Linear Complementarity Problem, Tech. Report 72-7, Dept. of Industrial and Operations Engineerung, University of Michigan (Ann Arbor 1972).

[74] Mylander, W.C. — Nonconvex Quadratic Programming by a Modification of Lemke's Method, Tech. Paper RAC-TP-414, Research Analysis Corporation, McLean, Virginia (February 1971).

[75] Nash, J. — "Non-Cooperative Games", Annals of Mathematics 54(1951) 286-295.

[76] Panne, C. van de — "A Complementary Variant of Lemke's Method for the Linear Complementarity Problem", Mathematical Programming 7(1974) 283-310.

[77] Ravindran, A. "Computational Aspects of Lemke's Complementary Algorithm Applied to Linear Programs", Opsearch 7(1970) 241-262.

[78] Ravindran, A. "A Comparison of the Primal-Simplex and Complementary Pivot Methods for Linear Programming", Naval Research Logistics Quarterly 20(1973) 95-100.

[79] Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis (2.Auflage New York/San Francisco 1964).

[80] Sacher, R.S. On the Solution of Large, Structured Linear Complementarity Problems: II, Tech. Report 73-5, Dept. of Operations Research, Stanford University (September 1973).

[81] Saigal, R. "Lemke's Algorithm and a Special Linear Complementarity Problem", Opsearch 8(1971) 201-208.

[82] Saigal, R. "A Charakterization of the Constant Parity Property of the Number of Solutions to the Linear Complementarity Problem", SIAM J.Appl.Math. 23(1972) 40-45.

[83] Saigal, R. "On the Class of Complementary Cones and Lemke's Algorithm", SIAM J.Appl.Math. 23(1972) 46-60.

[84] Samelson, H., Thrall, R.M. und Wesler, O. "A Partition Theorem for Euclidean n-Space", Proceedings of the American Mathematical Society 9(1958) 805-807.

[85] Scarf, H.E. "The Core of an N-Person Game", Econometrica 35(1967) 50-69.

[86] Scarf, H. "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping", SIAM J.Appl.Math. 15(1967) 1328-1343.

[87] Scarf, H. und Hansen, T. The Computation of Economic Equilibria (New Haven/London 1973).

[88] Shapley, L.S. "A Note on the Lemke-Howson Algorithm", Mathematical Programming Study 1(1974) 175-189.

[89] Shubik, M. Strategy and Market Structure (New York/London 1959).

[90] Simonnard, M. Linear Programming (Englewood Cliffs 1966).

[91] Stoer, J. und Witzgall, Ch. Convexity and Optimization in Finite Dimensions I (Berlin/Heidelberg/New York 1970).

[92] Tobin, J. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", The Review of Economic Studies 25(1957) 65-86.

[93] Todd, M.J. Abstract Complementary Pivot Theory, Dissertation, Dept. of Industrial Engineering, Yale University (1972).

[94] Todd, M.J. "A Generalized Complementary Pivoting Algorithm", Mathematical Programming 6(1974) 243-262.

[95] Todd, M.J. New Algorithms for the Linear Complementarity Problem, Tech. Report No.213, Dept. of Operations Research, Cornell University, Ithaca (January 1974).

[96] Varga, R.S. Matrix Iterativ Analysis (Englewood Cliffs 1962).

[97] Wendler, K. Hauptaustauschschritte (Principal Pivoting), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Band 45 (Berlin/Heidelberg/N.Y. 1971).

[98] Wolsey, L.A. Cubical Sperner Lemma as Applications of Generalized Complementary Pivoting, Core Discussion Paper No.7507, C.O.R.E, Universite Catholique de Louvain (March 1975).

[99] Ziemba, W.T., Parkan, C. und Brooks-Hill, R. "Calculation of Investment Portfolios with Risk Free Borrowing and Lending", Management Science 21(1974) 209-222.

Lebenslauf

9.2.1947	geboren in Hamburg als Sohn des kaufm. Angestellten Karl Bastian und seiner Ehefrau Paula, geb. Sauer
1954-1958	Besuch der Grundschule in Hamburg
1958-1968	Besuch des Gymnasiums in Hamburg-Farmsen
27.1.1968	Reifeprüfung
1.2.1968-31.3.1968	technisches Praktikum in einer Hamburger Werkzeugmaschinenfabrik
16.2.1970-12.4.1970 19.7.1971-20.8.1971	kaufmännisches Praktikum bei der Deutschen Unilever GmbH in Hamburg
1968-1971	Studium des Wirtschaftsingenieurwesens an der Universität Karlsruhe
3.9.1969	Vordiplom als Technischer Betriebswirt
28.10.1971	Diplom als Wirtschaftsingenieur
1.4.1970-30.6.1973	Förderung durch die Studienstiftung des Deutschen Volkes
1.11.1971-13.9.1973	Verwalter einer wissenschaflichen Assistentenstelle am Lehrstuhl für Mathematische Verfahrensforschung (OR) und Datenverarbeitung an der Universität Göttingen
1.8.1972-31.7.1973	beurlaubt zum Studium des Operations Research an der Stanford University (Kalifornien)
17.6.1973	Master of Science
ab 14.9.1973	Assistent am Lehrstuhl für Mathematische Verfahrensforschung (OR) und Datenverarbeitung an der Universität Göttingen